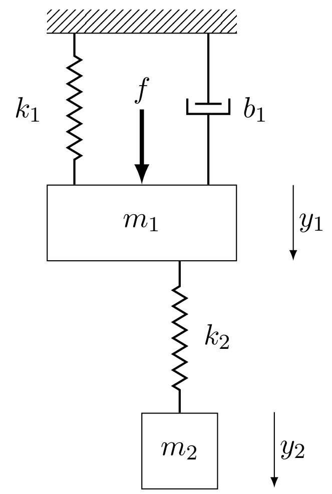
PRIMA PROVA IN ITINERE

TEORIA DEI SISTEMI e CONTROLLO OTTIMO

Esercizio 1 [4pt]

Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente sistema meccanico dove l'ingresso è la forza esterna $f(t)$ e le uscite gli spostamenti y_1 e y_2, $y_2 > y_1$ (misurati dalla configurazione di equilibrio) delle due masse.



soluzione

rappresentazione esterna

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + b_1\dot{y}_1 - k_2(y_2 - y_1) & = f \\ m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + b_1s + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2s^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} m_2s^2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & m_1s^2 + b_1s + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} m_2s^2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad d(s) = m_1m_2s^4 + b_1m_2s^3 + (k_1m_2 + k_2m_1 + k_2m_2)s^2 + b_1k_2s + k_1k_2$$

rappresentazione interna

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{j}u(t) \end{cases}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}, u = f, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_1} & 0 & -\frac{k_2}{m_1} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2a [2pt]

Si consideri il sistema autonomo a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad \text{dove} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si determinino i modi elementari del sistema e il loro carattere (limitato/convergente/divergente).
Si calcoli l'evoluzione del sistema a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

soluzione

$\mathbf{F}$ matrice diagonale

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_1^a = m_1^g = 1 \\ \lambda_2 = 0 & m_2^a = m_2^g = 1 \\ \lambda_3 = -3 & m_3^a = m_3^g = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ modi: e^t divergente, $e^{0t} = 1$ limitato, e^{-3t} convergente

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2b [2pt]

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1 - \alpha x_1^2(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_2(t)(1 - x_1^2(t)) \end{cases}$$

Si determinino i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità per $\alpha = -1$.

soluzione

per $\alpha = 0$ non esistono punti di equilibrio
per $\alpha \neq 0$ esistono due punti di equilibrio: $(\bar{x}_1', \bar{x}_2') = \left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$, $(\bar{x}_1'', \bar{x}_2'') = \left(-1, \frac{1}{\alpha}\right)$

per $\alpha = -1$ esistono due punti di equilibrio: $(\bar{x}_1', \bar{x}_2') = (1, -1)$, $(\bar{x}_1'', \bar{x}_2'') = (-1, -1)$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2x_1(t)x_2(t) & x_1(t)^2 \\ 2x_1(t)x_2(t) & -(1 - x_1^2(t)) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}' & (x_1(t), x_2(t)) = (\bar{x}_1', \bar{x}_2') \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}'' & (x_1(t), x_2(t)) = (\bar{x}_1'', \bar{x}_2'') \end{cases}$$

$\Delta_{\mathbf{F}'}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \longleftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j :\ \Re[\lambda_{1,2}] < 0 \implies (\bar{x}_1', \bar{x}_2') = (1, -1)$ asintoticamente stabile
$\Delta_{\mathbf{F}''}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \longleftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} :\ \Re[\lambda_1] < 0, \Re[\lambda_2] > 0 \implies (\bar{x}_1'', \bar{x}_2'') = (-1, -1)$ instabile

Esercizio 3 [4pt]

Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Studiare la raggiungibilità e la controllabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Fissato $\alpha = 0$, calcolare l'ingresso che porta il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ nel minor numero di passi.

soluzione

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank}(\mathcal{R}) = 2 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ il sistema non è raggiungibile per alcun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$X_R = \text{im}(\mathcal{R}) = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{im}(\mathbf{F}^3) = \text{im} \left(\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ \alpha + 2 & 1 & 3 \\ \alpha^2 + \alpha + 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema è controllabile per $\alpha = 0$

Per $\alpha = 0$ il sistema è controllabile, e, poiché $\mathbf{x}^*$ è il vettore nullo, esiste una sequenza d'ingresso che porta il sistema da $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_*$. La sequenza d'ingresso $u(t)$ cercata deve soddisfare $\mathbf{x}^* = \mathbf{F}^t \mathbf{x}_0 + \mathcal{R}_t u_t$.

$$t = 1: \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) \ \longleftrightarrow \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) \ \longleftrightarrow \ u(0) = -1$$