Corso di Analisi Matematica 2 parte A - 2023-24
Programma finale del corso

Spazi metrici. Spazi metrici e normati e loro topologia. Caratterizzazione topologica della continuità. Spazi metrici completi e completamento. Esempi significativi. Spazi metrici compatti e loro caratterizzazione. Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti. Lo spazio $C(K)$ è completo. Teorema di Ascoli-Arzelà. Contrazioni e Teorema di punto fisso di Banach. Enunciato dei teoremi di Brouwer e Schauder. Spazio delle trasformazioni lineari e continue, norma di un operatore, caratterizzazione della continuità. Esercizi.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e gradiente. Significato geometrico del gradiente. Derivate direzionali. Matrice Jacobiana di funzioni a valori vettoriali. Funzioni differenziabili e differenziale. Proprietà elementari del differenziale. Caratterizzazione della differenziabilità tramite lo sviluppo di Taylor. La differenziabilità implica la continuità e l'esistenza delle derivate direzionali. Identificazione di differenziale e matrice Jacobiana. Piano tangente ad un grafico. Teorema sul differenziale della funzione composta. Derivata di una funzione lungo una curva. Teorema del valor medio per funzioni scalari. Teorema del valor medio per funzioni vettoriali. Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili. Enunciato del Teorema di Rademacher. Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor in più variabili, con dimostrazione fino al secondo ordine. Teorema di Schwarz. Punti critici e punti di estremo locale. Richiami sulle forme quadratiche. Condizioni necessarie di estremalità. Condizione sufficiente di estremalità. Funzioni convesse: caratterizzazione delle funzioni convesse e continue (senza dim.), le funzioni convesse sono localmente Lipschitziane, caratterizzazione delle funzioni convesse di classe C^1 e di classe C^2, convessità e punti di minimo, enunciato del Teorema di Alexandrov. Esempi ed esercizi.

Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali in forma normale. Legame fra equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni del primo ordine. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili. Esempio di Peano. Equazioni omogenee e di Bernoulli. Problema di Cauchy e sua riformulazione integrale. Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione con ipotesi Lipschitz. Soluzioni massimali e criterio di prolungamento ("fuga dai compatti"). Lemma di Gronwall e criterio di esistenza globale con crescita al più lineare. Sistemi lineari e matrice esponenziale. Equazioni del secondo ordine lineari, wronskiano, variazione delle costanti. Studio qualitativo delle soluzioni. Dipendenza continua dai dati: Teorema di Kamke. Enunciato del teorema sulla dipendenza C^1 dai dati iniziali. Flusso di un campo vettoriale. Esercizi.

Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita. Diffeomorfismi e diffeomorfismi locali. Teorema di invertibilità locale. Teorema di Dini. Esempi.

Esercizi. Fanno parte integrante del Programma d'esame anche gli esercizi del Quaderno settimanale degli esercizi.

Modalità dell'esame scritto. Tre o quattro esercizi/problemi da risolvere sugli argomenti trattati nel corso: 1) Compattezza. 2) Spazi metrici completi e completamento 3) Contrazioni e punti fissi. 4) Limiti in più varibili, funzioni differenziabili, C^1 e C^2. 5) Punti critici, massimi e minimi locali e assoluti. Funzioni convesse. 6) Equazioni differenziali lineari del primo ordine e a variabili separabili. 7) Problema di Cauchy. Analisi qualitativa. 8) Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita.

Modalità dell'esame orale. All'esame orale verranno poste tre domande: 1) Enunciare e illustrare una definizione anche tramite esempi. 2) Enunciare e dimostrare un teorema. 3) Risolvere un esercizio tratto dal Quaderno degli esercizi.

R. Monti
30 gennaio 2024