Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 23/1/2024

Esercizio 1 (12 punti) Dato un parametro reale $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{\sin|x| - \sin|y|}{\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^\alpha}, \qquad \text{se } |x| \neq |y|,$$

ed $f(x,y) = 0$ quando $|x| = |y|$.

i) Provare che per $\alpha \geq 2$ la funzione f non è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Provare che per $\alpha \leq 1$ la funzione f è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) Studiare la continuità di f in 0 per $\alpha \in (1,2)$.

Risposte: iii) per $\alpha \in (1,2)$ la funzione f è continua in 0: si/no. NO

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(1/2 + x^2 + y^2\right) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza di una soluzione $y \in C^1(-\delta,\delta)$, $\delta > 0$, e le sue proprietà di simmetria.

ii) Provare che la soluzione massimale $x \mapsto y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

iii) Calcolare il limite $L_1 = \lim_{x\to\infty} y(x)$.

iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione.

v) Calcolare il limite

$$L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x \log y(x)}{y(x)}.$$

Risposte: i) simmetria: dispari iii) $L_1 =$ $+\infty$ v) $L_2 =$ $1/2$

Esercizio 3 (8 punti) Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left(x + y^5, y - x^7\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}^2$.

Risposte: i) F diffeomorfismo locale si/no ii) F diffeomorfismo globale si/no

2 ore e 30 minuti a disposizione