Esercizi visti il 19 dicembre

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 10.2] Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Seguiamo il procedimento descritto in [2, Sezione 9]. Cerchiamo una soluzione del problema omogeneo associato ovvero

$$y'' + y = 0$$

L'equazione associata è data da

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha dicriminante $\Delta < 0$ e soluzioni $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Quindi la soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ora dobbiamo determinare una soluzione particolare: la matrice wronskiana è data da

$$W(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

La condizione che richiediamo per W è che

$$W(x) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

Ovvero abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \cos(x)\psi_1 + \sin(x)\psi_2 = 0, \\ -\sin(x)\psi_1 + \cos(x)\psi_2 = \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$\psi_1 = -\frac{\psi_2 \sin(x)}{\cos(x)}$$

e sostituendo nella seconda otteniamo

$$\frac{\psi_2 \sin^2(x)}{\cos(x)} + \cos(x)\psi_2 = \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \psi_2 \left(\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} + \cos(x) \right) = \frac{1}{\cos(x)}$$

ovvero

$$\psi_2(x) = 1$$

e quindi

$$\psi_1(x) = -\tan(x)$$

integrando otteniamo

$$\phi_1(x) = -\int_0^x \tan(t)dt = [\ln|\cos(t)|]_0^x = \ln|\cos(x)|$$

e

$$\phi_2(x) = \int_0^x dt = x$$

da cui la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = x\sin(x) + \ln|\cos(x)|\cos(x)$$

quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + x\sin(x) + \ln|\cos(x)|\cos(x)$$

imponiamo le condizioni iniziali: da $y(0) = 0$ ricaviamo

$$0 = c_1$$

Ci calcoliamo $y'(x)$ ovvero

$$y'(x) = c_2\cos(x) + \sin(x) + x\cos(x) - \tan(x)\cos(x) - \ln|\cos(x)|\sin(x)$$

e da $y'(0) = 0$ ricaviamo

$$0 = c_2$$

da cui otteniamo finalmente la soluzione

$$y(x) = \cos(x)\ln|\cos(x)| + x\sin(x)$$

□

Esercizio 2. [1, Esercizio 10.3] Sia A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali $y' = Ay$.

Svolgimento. Sappiamo dalle ultime lezioni che la soluzione è data da

$$y(x) = e^{xA}x_0$$

dove $x_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ è definito come $y(0) = x_0$. Cerchiamo gli autovalori della matrice: ovvero calcoliamo il determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

i due autovalori sono quindi $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Vogliamo scrivere quindi A come

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

In tal modo avremo che

$$e^{xA} = Se^{x\Lambda}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Ci resta da capire chi è la matrice del cambio di base S. Cerchiamo gli autovettori di A: abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_1 \\ iw_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} w_2 = iw_1 \\ -w_1 = iw_2 \end{cases}$$

ovvero l'autospazio relativo a $\lambda_1 = i$ è generato da $(1, i)$. Allo stesso modo cerchiamo l'autospazio relativo a $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iw_1 \\ -iw_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} w_2 = -iw_1 \\ -w_1 = -iw_2 \end{cases}$$

ovvero l'autospazio relativo a $\lambda_2 = -i$ è generato da $(i, 1)$. Definiamo quindi

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

La sua inversa è data da

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

In definitiva quindi la soluzione è data da

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui

$$y_1(x) = \frac{1}{2}[e^{ix}(a - ib) + ie^{-ix}(-ia + b)] = \frac{1}{2}[e^{ix}(a - ib) + e^{-ix}(a + ib)]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}[ie^{ix}(a - ib) + e^{-ix}(-ia + b)] = \frac{1}{2}[e^{ix}(ia + b) + e^{-ix}(-ia + b)]$$

ce le riscriviamo in maniera più comoda

$$y_1(x) = a\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + ib\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2} = a\cos(x) + b\sin(x)$$

$$y_2(x) = ia\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} + b\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = -a\sin(x) + b\cos(x)$$

□

Esercizio 3. [1, Esercizio 11.2] Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1. Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.

2. Discutere eventuali simmetrie.

3. Studiare qualitativamente la monotonia della soluzione y.

4. Sia $(-b, b) \subseteq \mathbb{R}$, con $0 < b \leq \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$ e che $b > \sqrt{3/2}$.

Svolgimento. 1. La funzione $f(x, y) = y^2+x^2-1$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi in particolare è localmente lipschitziana: possiamo usare [2, Teorema 7.5.2] ed affermare che esiste un'unica soluzione locale.

2. Vediamo se y è pari, dispari o nessuna delle due. Definiamo $z(x) = y(-x)$: vediamo che y non è pari: non verifica lo stesso Problema di Cauchy perchè

$$z'(x) = -y'(-x) = -y^2(-x) - (-x)^2 + 1 = -z^2 - x^2 + 1.$$

Tuttavia y è dispari perchè se definiamo $z(x) = -y(-x)$ otteniamo

$$z'(x) = y'(-x) = y(-x)^2 + (-x)^2 - 1 = z(x)^2 + x^2 - 1$$

e $z(0) = -y(0) = 0$. Per l'unicità della soluzione y è dispari.

3. Studiamo la disequazione $f(x, y) > 0$ ovvero

$$y^2 + x^2 - 1 > 0$$

cioè il complementare aperto del disco: $x^2 + y^2 > 1$. Il punto iniziale $(x, y) = (0, y(0)) = (0, 0)$ si trova all'interno del disco. Quindi sappiamo che di certo la soluzione è decrescente in un intorno di $(0, 0)$ (perchè lì $f < 0$). Quando la soluzione incrocia il cerchio unitario abbiamo che f e quindi y' si annulla quindi esiste un certo $\overline{x} \in (0, 1)$ tale che $f'(\overline{x}) = 0$. Da quell'$\overline{x}$ in poi y è crescente. Visto che la funzione è dispari lo stesso succede anche a sinistra di $-\overline{x}$. Quindi quando in $\overline{x}, -\overline{x}$ y esce dal cerchio unitario poi non può più rientrarvi.

4. Dal punto precedente sappiamo che esiste un unico $x_0 \in (1, b)$ tale che $y(x_0) = 0$ (per semplicità ci mettiamo solo a destra dell'asse delle y visto che la funzione è dispari). Sia $\beta = \sqrt{x_0^2 - 1} > 0$. Quindi per $x > x_0$ otteniamo

$$y'(x) = y(x)^2 + x^2 - 1 \geq y(x)^2 + \beta^2$$

ovvero

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2 + \beta^2} \geq 1$$

integrando tra x_0 e b otteniamo

$$\int_{x_0}^{b} \frac{y'(x)}{y(x)^2 + \beta^2} dx \geq \int_{x_0}^{b} dx$$

ovvero

$$\int_{x_0}^{b} \frac{y'(x)}{y(x)^2 + \beta^2} dx \geq b - x_0$$

l'integrale è noto e si ha

$$\frac{1}{\beta} \left[\arctan \left(\frac{y(x)}{\beta} \right) \right]_{x_0}^{b} \geq b - x_0$$

da cui

$$\arctan\left(\frac{y(b)}{\beta}\right) \geq \beta(b - x_0)$$

quindi

$$\frac{\pi}{2} \geq \arctan\left(\frac{y(x)}{\beta}\right) \geq \beta(b - x_0)$$

e di conseguenza

$$b \leq \frac{\pi}{2\beta} + x_0$$

ovvero $b < \infty$. Vediamo che $b > \sqrt{3/2}$. Abbiamo che $y' = y^2 + x^2 - 1 \geq -1$ quindi integrando tra 0 e x per $x \in [0, b)$ otteniamo

$$y(x) \geq -x.$$

Se $y(x) \leq 0$ allora questa disuguaglianza equivale a

$$y(x)^2 \leq x^2.$$

Quindi per ogni $x \geq 0$ tale che $y(x) \leq 0$ si ha, sostituendo nell'equazione differenziale di partenza,

$$y'(x) \leq 2x^2 - 1$$

integrando da 0 a x otteniamo

$$y(x) \leq \frac{2}{3}x^3 - x$$

Ma allora abbiamo

$$0 = y(x_0) \leq \frac{2}{3}x_0^3 - x_0$$

e visto che ci restringiamo al semiasse delle x positivo ci resta che $x_0 > \sqrt{3/2}$. Ma allora possiamo concludere che

$$b > x_0 \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

□

Esercizio 4. [1, Esercizio 11.3] Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

2. Provare che la soluzione è una funzione crescente.

3. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ l'intervallo di esistenza della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$.

4. Provare che $y(x) > x$ per ogni $x \in (a, b)$.

5. Provare che

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) - x = 0.$$

Svolgimento. 1. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1}$$

Possiamo definire f in uno dei tre sottoinsiemi tagliati dall'iperbole $y^2 - x^2 - 1 = 0$. Visto che a noi interessa un intorno del punto $(0,1)$ ci mettiamo nel sottoinsieme "centrale" ovvero in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 + 1 > 0\}$. Abbiamo che $f \in C^\infty(A)$ quindi come nell'esercizio precedente possiamo usare [2, Teorema 7.5.2] per ottenere esistenza e unicità locale per il Problema di Cauchy.

2. Dal punto precedente sappiamo che $f > 0$ su A quindi $y' > 0$ su A quindi f è una funzione crescente.

3. *Risolviamo prima il punto 4. che useremo per mostrare il punto 3.*

4. Cerchiamo di capire quando $y^2 - x^2 + 1 \leq 1$: se questo accade allora

$$y'(x) = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow \int_0^x y'(t) \geq \int_0^x dt \Rightarrow y(x) - y(0) \geq x \Rightarrow y(x) \geq x + 1 > x.$$

Ma $y^2 - x^2 + 1 \leq 1$ se e solo se $(y-x)(y+x) \leq 0$ ovvero se siamo nelle zone evidenziate in blu in figura

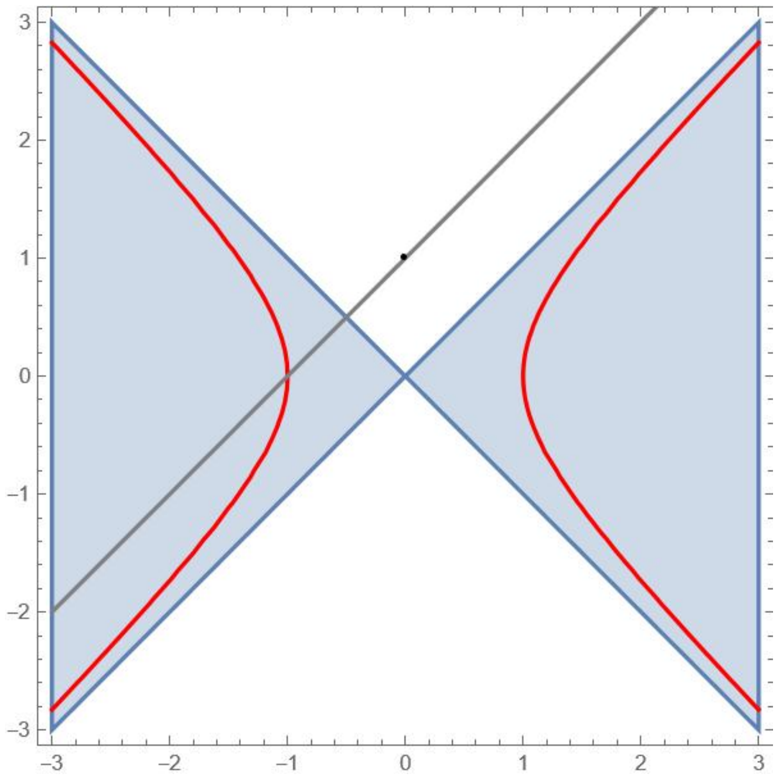

Figura 1: In blu siamo nella zona in cui $y(x) \geq x + 1$, in rosso il grafico di $y^2 - x^2 + 1 = 0$ (iperboloide), in grigio la retta $y = x + 1$, in nero il punto (di partenza) $(0,1)$. Ricordiamo che nella zona al centro tagliata dall'iperboloide y è crescente.

Dall'immagine segue la conclusione visto che "non possiamo entrare nelle zone blu" visto che altrimenti dovremmo "risaltare" al di sopra della retta grigia.

3. Vogliamo usare [2, Teorema 7.6.3] e mostrare che se $b \neq \infty$ allora non possiamo mai avere $\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$. Se ciò è vero allora possiamo dedurre che $b = \infty$. Come nel punto 4. osserviamo che $y^2 - x^2 + 1 \geq 1$ (ovvero se e soltanto se siamo nell'altra zona tagliata dalle due bisettrici) allora
$$y(x) \leq x + 1$$
Ma allora anche alla luce di quanto osservato prima la soluzione che "nasce" in $(0, 1)$ deve necessariamente restare tra le rette $y = x + 1$ e $y = x$. Nello specifico per ogni $x > 0$ vale $0 < y(x) \leq x + 1$. Ma allora se $0 < b \neq \infty$
$$\lim_{x\to b} |y(x)| = \lim_{x\to b} y(x) \leq \lim_{x\to b} x + 1 = b + 1 < \infty.$$

5. Dai punti precedenti abbiamo che per $x \geq 0$ segue
$$x < y(x) \leq x + 1$$
da cui
$$0 < y(x) - x \leq 1$$
Quindi se esiste un limite $L = \lim_{x\to\infty} y(x) - x$ abbiamo che $L \in [0, 1]$. Se mostriamo che $y(x) - x$ è decrescente allora abbiamo che certamente L esiste. Per $x > 0$ dai punti precedenti abbiamo che $y'(x) \leq 1$ quindi $\frac{d}{dx}(y(x) - x) = y'(x) - 1 \leq 0$ ovvero $y(x) - x$ è decrescente. Supponiamo ora per assurdo si abbia $L \in (0, 1]$. Definiamo per $x \geq 0$ $z(x) = y(x) - x$. Abbiamo che
$$z' = y' - 1 = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1} - 1 = \frac{1}{(z + x)^2 - x^2 + 1} - 1 = \frac{1}{z^2 + 2zx + 1} - 1$$
ma se mandiamo $x \to +\infty$ otteniamo (visto che $\lim_{x\to+\infty} z(x) = L > 0$) che
$$\lim_{x\to\infty} z'(x) = -1$$
ma ciò implicherebbe che $\lim_{x\to+\infty} z(x) = -\infty$, il che è assurdo. Necessariamente segue quindi che $L = 0$.

□

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf`

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf`