Esercizi

① Verificare che se λ è autovalore di $A \in M_n(K)$ allora λ^2 è autovalore di A^2 e più in generale λ^m è autovalore di A^m.

Sugg. Sia $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$ $\quad A^2 v =$

② Sia $A \in GL_n(K)$ e λ autovalore di A. Mostrare che $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ è autovalore di A^{-1}

Sugg: sia $Av = \lambda v$ con $v \neq 0$. Moltiplicare entrambi i membri a sinistra per A^{-1}

③ Sia $a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \in K[x]$

Esso è il polinomio caratteristico della matrice (COMPAGNA)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -a_0 \\ \hline \mathbb{1}_{n-1} & \begin{matrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{matrix} \end{array}\right)$$

Sugg. dimostrarlo per induzione. $n=1$, $n=2$

④ Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

calcolare $p_A(x)$, $m_A(x)$, autovalori, autospazi.
È diagonalizzabile?