Lez 33 - Geo 1 - mod A - 17/01/2024

Note Title

Conseguenza della T. di J.

Se A è triangolarizzabile allora $A \sim A^t$

Dim A triang $\Rightarrow A \sim$ matrice di Jordan J = matrice con blocchi di Jordan standard $J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}$ per opportuni $\lambda \in K$, $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Quindi $\exists\ P \in GL_n(K)$ t.c. $P^{-1} A P = J$

$$P J P^{-1} = A$$

$$A^t = (P J P^{-1})^t = (P^{-1})^t J^t P^t = (P^t)^{-1} J^t P^t$$

Mi basta dimostrare che $J \sim J^t$

$$J^t = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1)^t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_s}(\lambda_s)^t \end{pmatrix}$$

Mi basta dimostrare che $J_r(\lambda)^t \sim J_r(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_{J'}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f_{J'})$$

$J' = J_r(\lambda)$

$e_1 \longmapsto \lambda e_1$

$e_2 \longmapsto \lambda e_2 + e_1$

$e_j \longmapsto \lambda e_j + e_{j-1}$

$e_n \longmapsto \lambda e_n + e_{n-1}$

$J_r(\lambda)^t$

$e_1 \longmapsto \lambda e_1 + e_2$

$e_2 \longmapsto \lambda e_2 + e_3$

$e_j \longmapsto \lambda e_j + e_{j+1}$

$e_n \longmapsto \lambda e_n$

$\mathcal{V} = \{ v_1 = e_n, v_2 = e_{n-1}, \dots, v_n = e_1 \}$

Dunque le 2 matrici sono simili!

Esercizio Sia $\varphi: V \longrightarrow V$ endomorfismo.

- Suppongo $\varphi^2 = id$. Cosa posso dedurre?

  Il polinomio $x^2 - 1$ viene annullato da φ

Dunque $m_\varphi(x)$ divide $x^2-1=(x-1)(x+1)$

- $m_\varphi(x)=x-1 \Rightarrow \varphi-id=0 \Rightarrow \varphi=id$
- $m_\varphi(x)=x+1 \Rightarrow \varphi+id=0 \Rightarrow \varphi=-id$
- $m_\varphi(x)=(x-1)(x+1) \Rightarrow$ autovalori di φ sono 1 e -1

$$V=\underbrace{Ker(x-1)}_{U=V_1}\oplus\underbrace{Ker(x+1)}_{W=V_{-1}}$$

φ è diagonalizzabile per il 2° criterio

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&0&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&0&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$$

$\varphi(u)=u$ se $u\in U$

$\varphi(w)=-w$ se $w\in W$

$\Rightarrow \varphi$ è simmetria di asse $\underset{\text{autosp. di } 1}{U}$ e direz. $\underset{\text{autosp. di } -1}{W}$

- Suppongo che $\varphi^2=\varphi$

Allora φ annulla il polinomio $x^2-x=(x-1)x$

$m_\varphi(x)$ è:

- x: $\varphi=0$, $V=Ker\,\varphi$
- $x-1$: $\varphi-id=0 \Rightarrow \varphi=id$, $V=Ker(\varphi-id)$
- $x(x-1)$: $\varphi(\varphi-id)=0$

L. di decomp. $V=\underset{\substack{\neq 0\\ \|\\ U}}{Ker\,\varphi}\oplus\underset{\substack{\neq 0\\ \|\\ W}}{Ker(\varphi-id)}$

Gli autovalori di φ sono 0 e 1

φ è diagonalizzab. per il 2° criterio $\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&0&\\&&1&&\\&0&&0&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$

$\varphi(w)=w \quad \forall\, w\in W$ e $\varphi(u)=0 \quad \forall\, u\in U$

dunque $\varphi=\pi^U_W$

- Suppongo che $\varphi^3=id$ e V sia uno spazio vett. su $\mathbb{R}$ (oppure su $\mathbb{C}$)

So che φ annulla $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$K=\mathbb{R}$ $\quad m_\varphi(x)=$
- $x-1$ $\quad \varphi=id$
- x^2+x+1
- $(x-1)(x^2+x+1)$

$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ saranno blocchi diagonali se scelgo bene la base con $\alpha=a+ib$ radice cub. di 1

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}} & & \\ & & & & \boxed{\ } & \\ & & & & & \boxed{\ } \end{pmatrix}$$

$K = \mathbb{C}$ $\qquad x^3 - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$

molti casi possibili, e sempre diagonalizzabile!

<u>Esercizio</u>

Elenchiamo le possibili forme di Jordan di matrici (triangolabili) $n \times n$ con n piccolo.

- $n = 1$ $\qquad (\lambda)$

- $n = 2$ $\qquad p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\qquad \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$ $\quad$ è diagonalizz.
  - $\lambda_1 = \lambda_2$
    - $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$ $\quad$ 2 blocchi $J_1(\lambda_1)$
    - oppure $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ $\quad$ 1 blocco $J_2(\lambda_1)$

- $n = 3$ $\qquad p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$
  - Se i λ_i sono distinti $\leadsto$ A è diagonalizzabile $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & 0 \\ & \boxed{\lambda_2} & \\ 0 & & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$
  - Se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (a meno di permutaz. degli indici) $\qquad p_A(x) = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_3)$

    $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & 0 \\ & \boxed{\lambda_1} & \\ 0 & & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$
  - Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ $\qquad p_A(x) = (x-\lambda_1)^3$

    $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Esercizio Quante matrici triangolarizzabili vi sono a meno di similitudine aventi ordine 8 e polinomio minimo $(x-2)^3(x-5)^2$?

Cerco A 8×8 avrà $p_A(x) = (x-2)^a (x-5)^b$ con

$a+b=8 \qquad a\geq 3 \qquad b \geq 2$

Casi possibili

a	3	4	5	6
b	5	4	3	2

① $p_A(x) = (x-2)^3(x-5)^5$ $\qquad m_A(x) = (x-2)^3(x-5)^2$

dice che: ci deve essere almeno un $J_3(2)$

" " " almeno un $J_2(5)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & & & ? & & \\ & 5 & & & & \\ & & 5 & & & \\ & 0 & & 5 & & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

NB Non ci devono essere $J_4(2)$ o $J_3(5)$

Possibilità per il 2° blocco:

o 2 $J_2(5)$ e un $J_1(5)$ oppure 1 $J_2(5)$ e 3 $J_1(5)$

$$\begin{pmatrix} J_3(2) & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} J_3(2) & & & & 0 \\ & J_2(5) & & & \\ & & \boxed{5} & & \\ 0 & & & \boxed{5} & \\ & & & & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

② $p_A(x) = (x-2)^4(x-5)^4$

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & ? & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & 0 & & & 5 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

— 1 blocco $J_3(2)$ e 1 blocco $J_1(2)$

- 2 blocchi $J_2(5)$
- 1 blocco $J_2(5)$ e 2 blocchi $J_1(5)$

③
④ } esercizio

- Venerdì alle 12:30 ricevimento in aula.
- Sondaggio in Moodle.

9/9/22. Si consideri $q: \mathbb{R}[x]_{\leq 5} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 5}$

$p(x) \longmapsto p(x^2)$ modulo x^6 (uccido la coda)

① mostrare che è un endomorfismo

$$q(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5) \longrightarrow a_0+a_1x^2+a_2x^4$$

Sia $\mathcal{E}$ la base canonica

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x]_{\le 5} \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{E}}"', "\wr"] & \sum a_i x^i \arrow[r, "q"] \arrow[d, mapsto] & \mathbb{R}[x]_{\le 5} \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{E}}", "\wr"'] \\
\mathbb{R}^6 \arrow[rr, bend right, "f_A"'] & \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbb{R}^6
\end{tikzcd}$$

Per vedere che è lineare $q(\alpha \sum a_i x^i + \beta \sum b_j x^j) = \dots$

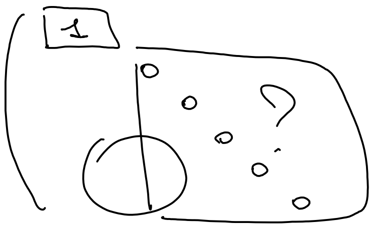
② Scrivere $\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(q) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ $p_A(x) = (-x)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)\,x^2\,(-x)^3 = (x-1)\,x^5$

$m_A(x) = (x-1)\cdot x^{?}$

$\mathbb{R}^6 = \underbrace{\ker(A-\mathbb{1})}_{\dim 1} \oplus \underbrace{\ker A^5}_{\dim 5}$, $\quad \ker A^5 = \ker A^{?}$

A è triangolarizzabile

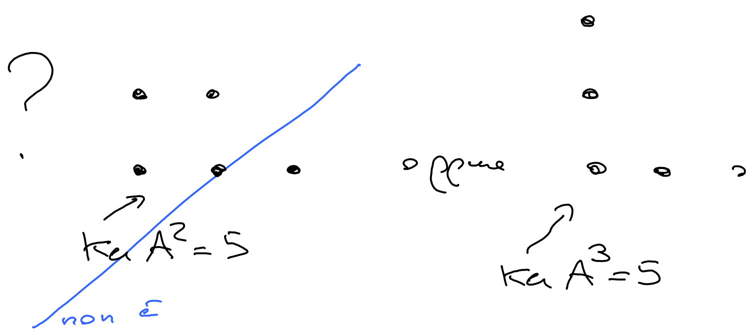


di questo tipo

$\ker(A-\mathbb{1}) = \langle e_1 \rangle$

Quindi se uso una base $\mathcal{V} = \{e_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ t.c. $v_2, \dots, v_6$ sono base di $\ker A^5$, $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f_A)$

$\ker A = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$



$2 \le ? \le 3$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & O & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \qquad \ker A^2 = \langle e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & O & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \qquad \ker A^3 = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$$

Suppongo già che $\underset{\uparrow \text{scelta}}{v_3} \in \ker A^3 - \ker A^2$

$$A v_3 = v_2$$

$$A^2 v_3 = A v_2 = v_1 \qquad \underbrace{v_4 \quad v_5}$$ in $\ker A$

devono essere scelti in modo da essere l. ind. con v_1

Scelgo $v_3 = e_2$ (ma potevo scegliere anche $e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + 7e_6$)

$v_2 = A e_2 = e_3$ $(\in \ker A^2)$

$v_1 = A e_3 = e_5$ $(\in \ker A)$

Scelgo $v_4 = e_4$ $v_5 = e_6$

Dunque risp. alla base $\mathcal{V} = \{ e_1, e_5, e_3, e_2, e_4, e_6 \}$

la matrice di f_A è

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \boxed{0} & \\ & & & & & \boxed{0} \end{pmatrix} = J'$$

Dunque la base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ che jordanizza q è

$\mathcal{B}$ $\{ \underbrace{1, x^4, x^2, x, x^3, x^5}_{} \}$

i polinomi le cui coordinate danno la base $\mathcal{V}$

(controllare $\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(q) = J'$)

Polinomio minimo di A è : $(x-1)\cdot x^3$

Infatti $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ elevo ulteriormente $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

$e_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$
$e_2 \longrightarrow e_1 \longrightarrow 0$
$e_3 \longrightarrow e_2 \longrightarrow e_1$

Se $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^n \neq 0$ se $\lambda \neq 0$

$$(\lambda \mathbb{1} + J_r)^n = \left(\lambda^n \mathbb{1} + n\lambda^{n-1} J_r + \binom{n}{2}\lambda^{n-2} J_r^2 \cdots\right)$$

se $\lambda \neq 0$ la diagonale non è nulla

$\begin{pmatrix} \lambda^n & \cdot\lambda^{n-1} & \cdot\lambda^{n-2} & \\ & \lambda^n & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \lambda^n \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ è simile alla matrice $J_r(\lambda^n)$ ma non uguale

Esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$(2\mathbb{1} + J_3)^2 = 4\mathbb{1} + 4J_3 + J_3^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

esercizio

$$(2\mathbb{1} + J_3)^3 = 8\mathbb{1} + 3\cdot 4 J_3 + 3\cdot 2 J_3^2 + \cancel{J_3^3}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ & 8 & 12 \\ 0 & & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ & 8 & 1 \\ 0 & & 8 \end{pmatrix}$$