Lez 32 - Geo 1 - mod A - 16/01/2024

Note Title

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Matrici quadrate a} \\ \text{coeff in } K \end{array} \right\} \longrightarrow K[x]_{\text{monici}}$$

$$A \longmapsto p_A(x)$$

Non è iniettiva; se A è simile a $B \Rightarrow p_A(x) = p_B(x)$ ma non vale il viceversa

Controesempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ simile solo a sé, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non sono simili ma hanno lo stesso pol. car.

È suriettiva: ad es. $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$

Matrice compagna di $p(x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = A$$

ad es. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$

$$\det(x\mathbb{1} - A) = p(x)$$

si dim per induzione. (Esercizio)

$n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x(x+a_1) + a_0 = x^2 + a_1 x + a_0$

$n=3$ $\begin{vmatrix} x & 0 & a_0 \\ -1 & x & a_1 \\ 0 & -1 & x+a_2 \end{vmatrix}$ Laplace 1ª riga $= \; x \begin{vmatrix} x & a_1 \\ -1 & x+a_2 \end{vmatrix} + a_0 \cdot 1 =$

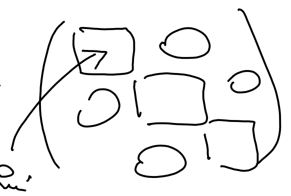
$x(x^2 + a_2 x + a_1) + a_0 = p(x)$.

....

Teoria di Jordan

$\varphi: V \longrightarrow V$ endomorf triangolarizz. $\quad n = \dim V$

Cerco base $\mathcal{V}$ t.c. $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$ sia in forma canonica



Blocchi detti di Jordan che descriveremo.

Dal lemma di decomposizione, essendo $p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{m_i}$

con λ_i a 2 a 2 distinti

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \, id)^{m_i}}_{V_i} \qquad \text{con } V_i \quad \varphi\text{-stabili}$$

Dunque se scelgo una base $\mathcal{V}$ di V ottenuta unendo basi dei V_i la matrice $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

con A_i = matrice di φ ristretta a V_i

Dunque basta studiare il caso degli endomorfismi del tipo $\underbrace{\varphi - \lambda \, id}_{\psi \in \operatorname{End} V}$ sapendo che $(\varphi - \lambda \, id)^m = 0$
$\psi^m = 0$

ψ è dunque un endomorfismo nilpotente
(ossia esiste un $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ t.c. $\psi^s = 0$)

$$\psi : \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{V} \longrightarrow V$$

nilpotente. Il polinomio caratt. di ψ è x^n $\quad n = \dim V$

Il polinomio minimo di ψ è x^m con m il minimo esponente t.c. $\psi^m = 0$

$$0 < \operatorname{Ker}\psi \leq \operatorname{Ker}\psi^2 \leq \operatorname{Ker}\psi^3 \leq \qquad \underset{\underset{V}{\shortparallel}}{\operatorname{Ker}\psi^m} \leq \quad \leq \underset{\underset{V}{\shortparallel}}{\operatorname{Ker}\psi^n}$$

Esercizio • $\operatorname{Ker}\psi^i \leq \operatorname{Ker}\psi^{i+1}$ $\qquad$ (se $\psi^i(v) = 0$ $\quad \psi^{i+1}(v) = \psi(\psi^i v) = \psi(0) = 0$)

• Le inclusioni $\operatorname{Ker}\psi^i \subset \operatorname{Ker}\psi^{i+1}$ sono strette fino all'esponente m e da quel punto in poi sono tutte uguaglianze

Spiego come costruire una base jordanizzante la matrice di ψ

supponendo $m=4$ (ma il ragionamento funziona sempre)
$\uparrow$ minimo

$$V = \ker\varphi^4 = V_4 \oplus \ker\varphi^3$$
$$= V_4 \oplus \left(V_3 \oplus \ker\varphi^2\right)$$
$$= V_{(4)} \oplus V_{(3)} \oplus \left(V_{(2)} \oplus \overset{V_{(1)}}{\ker\varphi}\right)$$

non scrivo le parentesi!

V_4 è un complement di $\ker\varphi^3$

V_3 compl. di $\ker\varphi^2$ in $\ker\varphi^3$

V_2 compl. di $\ker\varphi$ in $\ker\varphi^2$

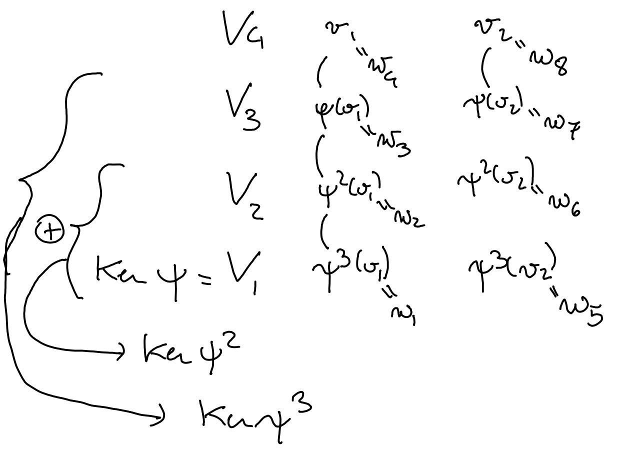
<u>Esercizio</u> Se φ nilpotente di $V \longrightarrow V$ come sopra

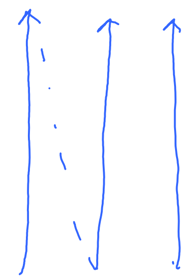
allora $\varphi|_{V_j} : V_j \longrightarrow V_j$ è iniettiva e posso scegliere $\{V_j\}$ in modo che $\varphi(V_j) \subseteq V_{j-1}$, ossia $\varphi(V_j) \cap \ker\varphi^{j-2} = 0$

Conseguenza se $v_1, \dots v_e \in V_4$ sono l. indip.

allora $v_1, \dots v_e, \varphi(v_1), \dots \varphi(v_e), \varphi^2(v_1), \dots \varphi^2(v_e), \varphi^3(v_1), \dots \varphi^3(v_e)$

sono l. indipendenti





Parto da una base $v_1, \dots v_e$ di V_4

Scrivo base di $V \Rightarrow \mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \dots w_8$

$\varphi(w_1) = 0$

$\varphi(w_2) = w_1$

$\varphi(w_3) = w_2$

$\varphi(w_4) = w_3$

$$\alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{array}{|cccc|} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \end{matrix} \\ & \begin{array}{|cccc|} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & & 0 & 1 \\ \end{array} \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

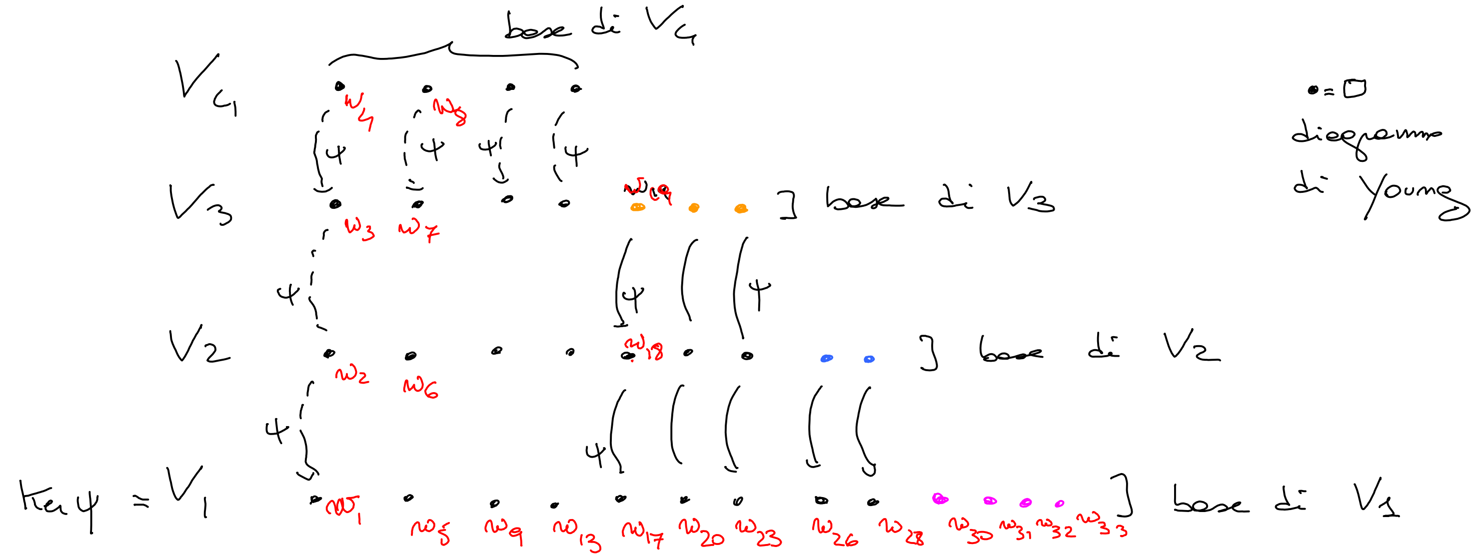
Chiamo le matrici

$$J_1 = (0) \qquad J_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \dots \quad J_n = \begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}$$

<u>Nilpotenti standard</u>

Posso osservare: se $\varphi: V \longrightarrow V$ è nilpotente esiste una base $\mathcal{W}$ di V t.c. $\alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(\varphi)$ sia formata da blocchi diagonali del tipo J_r per opportuni r.

Torno al caso $m = 4$



Nell'esempio $n = 33 = \dim V$ $\qquad \mathcal{W} = \{w_1, \dots\dots, w_{33}\}$

$$\alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_4 &&&&&&&&&&&& \\ & J_4 &&&&&&&&&&& \\ && J_4 &&&&&&&&&& \\ &&& J_4 &&&&&&&&& \\ &&&& J_3 &&&&&&&& \\ &&&&& J_3 &&&&&&& \\ &&&&&& J_3 &&&&&& \\ &&&&&&& J_2 &&&&& \\ &&&&&&&& J_2 &&&& \\ &&&&&&&&& \underset{\uparrow\, J_1}{0} &&& \\ &&&&&&&&&& 0 && \\ &&&&&&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

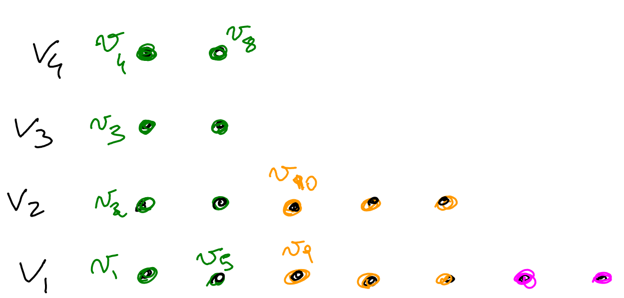
$\varphi(w_{19}) = w_{18} \qquad \varphi(w_{18}) = w_{17} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

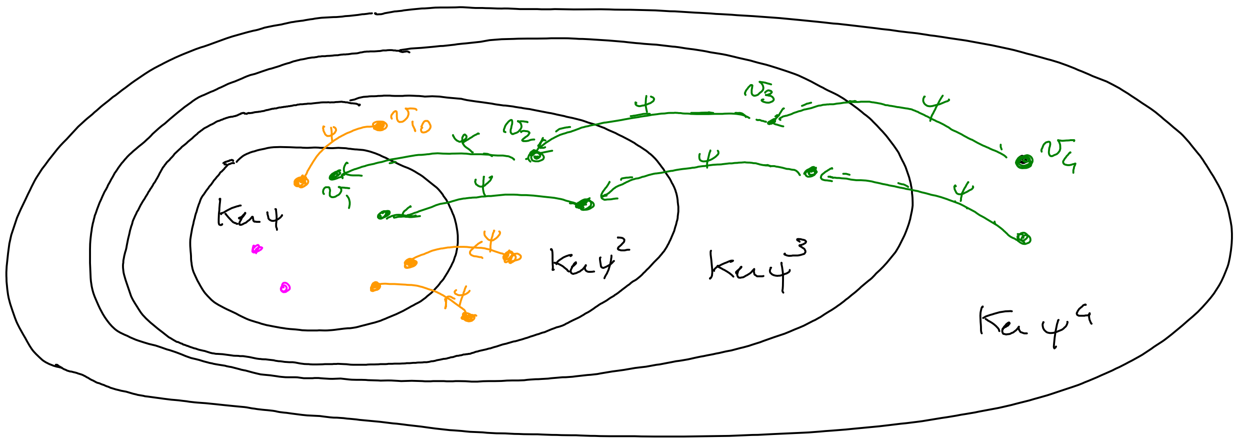
<u>Teorema</u> Due matrici nilpotenti dello stesso ordine sono simili $\Longleftrightarrow$ hanno gli stessi blocchi di Jordan (matrici nilpotenti standard) nello stesso numero.

Infatti i blocchi J_k e i_e sono numero dipendono dal diagramma di Young e quindi solo dalle dimensioni dei $\ker \varphi^i$

Esempio



$$\left.\begin{array}{l} \ker\varphi = V_1 \text{ ha dim } 7 \\ \ker\varphi^2 = V_1 \oplus V_2 \text{ ha dim } 12 \\ \ker\varphi^3 = V_3 \oplus V_1 \oplus V_2 \text{ ha dim } 14 \\ V \text{ ha dim } 16 \end{array}\right.$$



<u>Esercizio</u> Determinare una base jordanizzante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dopo aver dimostrato che è nilpotente

A è nilpotente $\iff p_A(x) = x^5$

$$p_A(x) = |x\mathbb{1} - A| = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$$

sviluppo con Laplace risp. alla 2ª riga

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x+1)\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} - 1(-1)\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x^2 \cancel{-1} \cancel{+1})\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Somma $= x^2 \left(x^3 + x - x \right) = x^5$ $\qquad m_A(x) = x^m \qquad \underset{?}{m} \leq 5$

$$0 \neq \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2 \subseteq \dots \subseteq \operatorname{Ker} A^5 = K^5$$

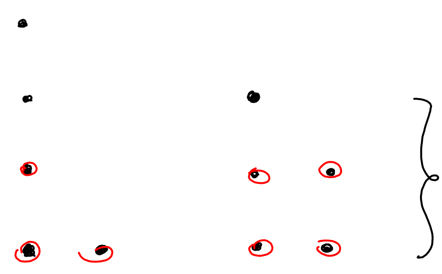
$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

la matrice ha rango ≤ 3 e anzi 3 perché c'è minore non nullo di ordine 3

Dunque $\dim \operatorname{Ker} A = 2$

$\operatorname{Ker} A^2 = ?$

$$\operatorname{Ker} A \underset{\text{esercizio}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{e_2+e_5}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$



$$A^2 \underset{\text{calcolo!}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{=e_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{=e_2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{=e_5} \right\rangle$$ ha dim 4 $\Rightarrow$ è la 2ª

(controllo che $\operatorname{Ker} A \leq \operatorname{Ker} A^2$) sì

$A^3 = 0$ (lo dice la teoria, se volete controllatelo!)

A ha diagramma $\begin{array}{cc} v_3 \bullet & \\ v_2 \bullet & \bullet v_5 \\ v_1 \bullet & \bullet v_4 \end{array}$ e dunque $A \sim \begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

Devo trovare $\mathcal{W} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ (jordanizzante) t.c.

$$H^{-1} A H = \begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_2 \end{pmatrix} \qquad H = (v_1, v_2 \dots v_5) \text{ come colonne}$$

$v_3 \in V_3 = K^5 \setminus \ker A^2$ Prendo $\boxed{v_3 = e_4}$ (potevo prendere e_3 o un qualsiasi vettore non in $\ker A^2$)

$v_2 = Av_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A^2$

$v_1 = \underset{A^2 v_3}{\overset{\shortparallel}{Av_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A$

$\underset{e_2}{\overset{\shortparallel}{v_5}} \in \ker A^2 \setminus \langle \ker A, \underset{-e_1}{v_2} \rangle$ $\qquad v_4 = Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad H^{-1}AH = \begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$$

<u>Teorema di Jordan</u>

Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ triangolarizzabile.

Allora esiste una base v di V t.c. $A = \alpha_{vv}(\varphi)$ sia una matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{\ddots} & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

con $A_i = \lambda_i \mathbb{1} + N_i$ con N_i matrice nilpotente a blocchi di Jordan

ossia $A_i = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 \\ & \lambda_i \end{matrix}} & \\ & & \boxed{} \end{pmatrix}$ è fatta a blocchi

$J_s(\lambda_i) = \lambda_i \mathbb{1}_s + \underset{\text{nilpotente standard}}{J_s}$

Si dimostra immediatamente grazie a quanto visto per le nilpotenti. Sappiamo già che posso lavorare sui singoli blocchi A_i dati da $\varphi|_{\ker(\varphi - \lambda_i id)^{m_i}}$ (ricordo lemma di decomp.)

Sto lavorando con φ sapendo che ha pol. caratt. $\underbrace{(\varphi - \lambda_i id)}_{\psi \text{ è nilpot.}}^{m}$

$\varphi = \lambda id + \underset{\text{nilpotente}}{\psi}$

Scelgo una base $\mathcal{V}$ t.c. $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$ sia a blocchi J_s, $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$ sarà $\lambda \mathbb{1}_n + \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$ = ossia è della forma cercata!

"

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\lambda id) + \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$

$\square$

Osservo che se $A = \lambda \mathbb{1} + N$ nilpotente.

$$A^r = (\lambda \mathbb{1} + N)^r = \lambda^r \mathbb{1} + \binom{r}{1} \lambda^{r-1} N + \dots \binom{r}{r-1} \lambda N^{r-1} + N^r$$

$$(\lambda \mathbb{1} + N)^2 = (\lambda \mathbb{1} + N)(\lambda \mathbb{1} + N) = \lambda^2 \mathbb{1} + \underbrace{\lambda \mathbb{1} \cdot N + N \cdot \lambda \mathbb{1}}_{2\lambda N} + N^2$$

se r è grande $N^r = 0$ A^r sarà somma di al più m termini se $N^m = 0$

Capire Esercizio $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^r = ?$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}^r = ?$

A triangolarizzabile $A \sim D + N$ ← blocchi di Jordan

$A = P^{-1}(D+N)P$ $DN = ND$ caso particolare

$$A^r = \left[P^{-1}(D+N)P\right]^r \overset{!}{=} P^{-1}\underline{\underline{(D+N)^r}}P$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j N^{n-j}$$

$D^j = \begin{pmatrix} d_1^j & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^j \end{pmatrix}$

N^{n-j}: 0 se $n-j \gg$