Lez 31 - Geo 1 - mod A - 15/01/2024

Note Title

Lemma di decomposizione:

Sia $\varphi : V \to V$ endomorfismo e sia $F(x) \in K[x]$ t.c. $F(\varphi) = 0 \in End(V)$.
Supponiamo $F = F_1 \cdots F_r$ con $F_i(x) \in K[x]$ non costanti e 2 a 2 coprimi.
Detti: $V_i := Ker\, F_i(\varphi)$ si ha $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = V$ e inoltre
i V_i sono φ-stabili ossia $\varphi(V_i) \subseteq V_i$

Dim (Lemma di decomposizione) Per induzione su r

$\boxed{r=1}$ $F = F_1$ $\quad V = Ker\, F(\varphi) = Ker\, \underset{\text{endomorf}}{0}$ $\quad$ $V = V$ OK.
$\varphi(V) \subseteq V$

$\boxed{r=2}$ $F = F_1 F_2$ con $\boxed{1 = G_1 F_1 + G_2 F_2}$ (⊛) esistono $G_i \in K[x]$

Da verificare $V = V_1 \oplus V_2$ con $V_i = Ker\, F_i(\varphi)$

ossia $\begin{cases} V_1 \cap V_2 = 0 \\ V = V_1 + V_2 \end{cases}$ e $\varphi(V_i) \subseteq V_i$

Prendo $v \in V_1 \cap V_2$ Calcolo ⊛ in φ $\quad id_V = G_1(\varphi)F_1(\varphi) + G_2(\varphi)F_2(\varphi)$
e calcolo l'immagine di v tramite i due endom.

$$v = \underbrace{[G_1(\varphi) \circ F_1(\varphi)](v)}_{v_2} + \underbrace{[G_2(\varphi) \circ F_2(\varphi)](v)}_{v_1}$$

Mostro che v_1 e v_2 sono nulli $\Rightarrow v = 0$

- $(G_i(\varphi) \circ F_i(\varphi))(v) = G_i(\varphi)\big(\underbrace{F_i(\varphi)(v)}_{0}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 = 0$

Ora mostro che $V_1 + V_2 = V$

Sia $v \in V \Rightarrow v = \underbrace{(G_1(\varphi) \circ F_1(\varphi))(v)}_{v_2} + \underbrace{(G_2(\varphi) \circ F_2(\varphi))(v)}_{v_1}$

Mostro che $v_i \in V_i = Ker\, F_i(\varphi)$ $\quad$ questi particolari endomorf commutano!

$F_2(\varphi)(v_2) = [F_2(\varphi) \circ G_1(\varphi) \circ F_1(\varphi)](v_2) = [F_2(\varphi) \circ F_1(\varphi) \circ G_1(\varphi)](v_2)$

$= [\underbrace{(F_2 F_1)(\varphi)}_{\overset{\shortparallel}{(F_1F_2)(\varphi) = F(\varphi) = 0}} \circ G_1(\varphi)](v_2) = 0$ Dunque $v_2 \in \ker F_2(\varphi)$

Analogamente $F_1(\varphi)(v_1) = 0$

- I sottospazi $V_i = \ker F_i(\varphi)$ sono φ-stabili

<u>Dim</u> Sia $v \in V_1$. Mostriamo che $\varphi(v) \in V_1 = \ker F_1(\varphi)$

$F_1(\varphi)(v) = 0$ per ipotesi

commutano

$$F_1(\varphi)(\varphi(v)) = (F_1(\varphi) \circ \varphi)(v)$$
$$\cancel{= [(F_1 \cdot x)(\varphi)](v) = [(xF_1)(\varphi)](v)}$$
$$= (\varphi \circ F_1(\varphi))(v) = \varphi(F_1(\varphi)(v)) = \varphi(0) = 0$$

Analogamente si dimostra che se $F_2(\varphi)(v) = 0$ (ossia se $v \in V_2$) allora anche $\varphi(v) \in V_2$

$\boxed{r > 2}$ Suppongo vero il lemma sia vero per $\leq r-1$ fattori con $r > 2$

e osservo che se $F = \underbrace{F_1 \cdots F_{r-1}}_{\tilde{F}} F_r$ con F_i a 2 a 2 coprimi allora $\tilde{F}$ è coprimo con F_r.

Dunque so che $V = \tilde{V} \oplus V_r$ dal caso $\boxed{r=2}$

con $\varphi(\tilde{V}) \subseteq \tilde{V}$ e $\varphi(V_r) \subseteq V_r$

ove $\tilde{V} = \ker \tilde{F}(\varphi)$ e $V_r = \ker F_r(\varphi)$

Ora $\tilde{F}$ è prodotto di $r-1$ fattori coprimi e

$\tilde{\varphi} := \varphi_{|\tilde{V}}$ $\tilde{F}(\tilde{\varphi}) = 0$. Dunque per ipotesi induttiva

$\tilde{V} = V_1 \oplus \dots \oplus V_{r-1}$ con $V_i = \ker F_i(\varphi) = \ker F_i(\tilde{\varphi})$

e $\varphi(V_i) \subseteq V_i$

$\tilde{\varphi}(V_i)$

Conseguenza $\varphi: V \longrightarrow V$ $p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - d_i)^{m_i}$ d_i distinti

posso prendere $F_i = (x - d_i)^{m_i}$, $F = p_\varphi(x)$ e ottengo per H.C.

che $F(\varphi) = 0$ e dunque $V = \underbrace{\ker(\varphi - d_1 id)^{m_1}}_{} \oplus \dots \oplus \ker(\varphi - d_r id)^{m_r}$

Autospazi generalizzati ← ruolo fondam. in teoria di Jordan

Da questo abbiamo dedotto 2° criterio di diagonalizzabilità

(1° diag. vuol dire λ_i tutti in K e m_i = dim autospazio oppure
2° - - - - - - - - - - - - $\Leftarrow m(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$)

(NB) Se $m_D(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$ di autovalori distinti

$$V = \operatorname{Ker} m_D(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_1)\oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_r)$$

autospazi usuali.

In questo caso φ diagonalizzabile.

(NB) Se D, D' diagonali hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità allora D è simile a D'.

Esempio $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ $\quad D' = \begin{pmatrix} d_2 & \\ & d_1 \end{pmatrix}$ con $d_2 \neq d_1$ (altrimenti $D = D'$)

$f_D: e_1 \longmapsto d_1 e_1$, $e_2 \longmapsto d_2 e_2$

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ t.c. $f_D(v_1) = d_2 v_1$, $f_D(v_2) = d_1 v_2$

$\mathcal{V} = \{e_2, e_1\}$, $e_2 = v_1$, $e_1 = v_2$

D e D' rappresentano la stessa applicaz. risp. a basi ≠

⟹ sono simili.

Ad esempio $D = \begin{pmatrix} d_1 &&&&&&&& \\ & d_1 &&&&&&& \\ && d_1 &&&&&& \\ &&& d_2 &&&&& \\ &&&& d_2 &&&& \\ &&&&& d_3 &&& \\ &&&&&& d_3 && \\ &&&&&&& d_3 & \\ &&&&&&&& d_3 \end{pmatrix} \sim D' = \begin{pmatrix} d_1 &&&&&&&& \\ & d_2 &&&&&&& \\ && d_3 &&&&&& \\ &&& d_1 &&&&& \\ &&&& d_2 &&&& \\ &&&&& d_3 &&& \\ &&&&&& d_2 && \\ &&&&&&& d_3 & \\ &&&&&&&& d_3 \end{pmatrix}$

Se permuto i termini sulla diagonale permuto anche i vettori della base.

$e_1\ e_4\ e_6\ e_2\ e_5\ e_7\ e_3\ e \dots$

e_7

Lemma Siano A_1, A_2 diagonalizzabili. Allora $A_1 \sim A_2$
$\Leftrightarrow A_1, A_2$ hanno gli stessi autovalori con stesse molteplicità.

Dim ⟹) Se $A_1 \sim A_2 \sim D \Rightarrow p_{A_1}(x) = p_{A_2}(x) = p_D(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i}$

⟸) Suppongo che $A_1 \sim D_1$ e $A_2 \sim D_2$

e suppongo che abbiano entrambe autovalori $\lambda_1, \dots \lambda_r$ di molt. $m_1, \dots m_r$.

$$p_{A_1}(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i} = p_{A_2}(x) \Rightarrow D_1 \sim D_2 \Rightarrow A_1 \sim A_2$$

$p_{A_1}(x) = p_{D_1}(x)$, $p_{A_2}(x) = p_{D_2}(x)$

La volta scorsa abbiamo visto il teorema di H. C. ($p_A(A) = 0$)

Se A è invertibile: $p_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

$$0 = p_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n \mathbb{1} = 0$$

Se A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow a_n \neq 0$ (infatti $a_n = (-1)^n \det A$)

Dunque $-\frac{1}{a_n}\left(A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A\right) = \frac{-a_n \mathbb{1}}{-a_n} \; (\neq 0)$

$$A \underbrace{\left(-\frac{1}{a_n} A^{n-1} - \frac{a_1}{a_n} A^{n-2} \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)}_{A^{-1}} = \mathbb{1}_n$$

Ora 3 metodi per calcolare A^{-1} se A è invertibile:
- Metodo di Gauss
- Metodo con la matrice A^c
- Metodo con $p_A(x)$.

__Esercizio__

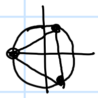
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \in M_3(\mathbb{R}) \subseteq M_3(\mathbb{C})$$

$$p_A(x) = |x\mathbb{1} - A| = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1)(x(x-1)+1) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

autovalori:
- -1 in $\mathbb{R}$ — A non è triangolarizz. su $\mathbb{R} \Rightarrow$ no diagonalizz.
- $-1, \; e^{\frac{\pi}{3}i}, \; e^{-\frac{\pi}{3}i}$ in $\mathbb{C}$

$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{\alpha}$

Scrivo $\alpha = a + ib$, $\quad a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$



su $\mathbb{C}$ A è diagonalizz. perché ha tutti gli autovalori con molt. 1.

$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$
$1 = \alpha - \alpha^2$

Cerco gli autospazi in $\mathbb{C}^3$ di $A \in M_3(\mathbb{C})$. Trovo

$$V_{-1} = \langle e_2 \rangle, \quad V_\alpha = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{= v_2} \right\rangle, \quad V_{\bar{\alpha}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\rangle$$

__Infatti:__

$p_A(x) = (x+1)(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$

$V_{-1} = \operatorname{Ker}(A + \mathbb{1})$, $V_\alpha = \operatorname{Ker}(A - \alpha\mathbb{1}) \subseteq \mathbb{C}^3$. Per il lemma di decomposizione ho:

$$\mathbb{C}^3 = V_{-1} \oplus V_\alpha \oplus V_{\bar{\alpha}}$$

$V_{-1} = \ker(A + \mathbb{1}) = \langle e_2 \rangle$ ✓ lo vedo direttamente sapendo che $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e vedendo che $A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_2$

$\ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} +1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\ker(A^2 - A + \mathbb{1}) = \ker(A - \alpha\mathbb{1}) \oplus \ker(A - \bar{\alpha}\mathbb{1})$$

$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$A - \alpha\mathbb{1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{-\alpha} & 0 & 1 \\ 0 & -1-\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}}$$

$\uparrow$ matrice di rango 2 perché α è autovalore

$\underbrace{\alpha \cdot 3^a \text{ riga}}_{1^a \text{ riga}} = (-\alpha \quad 0 \quad \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\alpha - \alpha^2}})$

$\ker(A - \alpha\mathbb{1}) =$ Soluz. ~~del~~ sistema $\begin{cases} -\alpha x_1 + x_3 = 0 \\ (-1-\alpha) x_2 = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$

$\neq 0 \Rightarrow 3^a$ eq. superflua.

Analogamente $\ker(A - \bar{\alpha}\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$

NB se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e α è autovalore in $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ di A

e $v \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di autovalore α

Allora $\bar{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è autovalore (perché $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$)

$\underline{Av} = \underline{\alpha v} \Rightarrow \overline{A}\,\overline{v} = \bar{\alpha}\,\bar{v} \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\alpha}\bar{v}$ | autovettori relativi ad $\bar{\alpha}$ sono i coniugati degli autovettori relativi ad α

coniugio su tutte le entrate.

Dunque $A \overset{\text{simile}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

$H^{-1} A H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ con $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$

Cosa posso dire di $A \in M_3(\mathbb{R})$? So che non è diagonalizzab.

$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\ker(A + \mathbb{1})}_{\substack{\dim 1 \\ \shortparallel \\ \langle e_2 \rangle}} \oplus \underbrace{\ker(A^2 - A - \mathbb{1})}_{\dim 2}$ blocchi A-stabili

$\uparrow$ o lo calcoliamo "a mano" (sconsigliato)

o ragioniamo

$$\ker(A^2 - A - \mathbb{1}) \overset{\text{in } \mathbb{C}^3}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underset{\substack{\shortparallel \\ w_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ w_2 = \overline{w_1}}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}} \right\rangle$$

e cerco 2 generatori a coordinate reali

Osservo che $\frac{w_1 + \overline{w_1}}{2}$ = vettore in $\mathbb{R}^3$ $=: w_{1R}$

$w_1 = w_{1R} + i\, w_{1Ig}$

$\frac{w_1 - \overline{w_1}}{2i}$ = - - - - .. $\mathbb{R}^3 =: w_{1Ig}$

nel ns caso $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0i \\ 0+0i \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$\ker(A^2 - A - \mathbb{1}) = \langle w_{1R}, w_{1Ig} \rangle$

$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(f_A)$

$\alpha = a + ib = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = \mathrm{Re}\,\alpha$

$b = \mathrm{Im}\,\alpha$

$\mathcal{W} = \{ e_2, w_{1R}, w_{1Ig} \}$

Infatti:

$A w_1 = \alpha w_1$

$\cancel{A \overline{w_1} = \overline{\alpha}\, \overline{w_1}}$

$A(w_{1R} + i w_{1Ig}) = (a+ib)(w_{1R} + i w_{1Ig})$

$\underbrace{A(w_{1R})} + i \underbrace{A w_{1Ig}} = \underbrace{a w_{1R} - b w_{1Ig}} + i \underbrace{(b w_{1R} + a w_{1Ig})}$

$\alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(f_A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$ con $\mathcal{W} = \{ e_2, w_{1R}, w_{1Ig} \}$

Quanto visto sopra vale in generale

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\alpha = a+ib$, $\overline{\alpha} = a - ib$ sono coppia di autovalori complessi coniug.

$w = w_R + i w_{Ig}$ autovettore in $\mathbb{C}^n$ di autovalore α

allora $A \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ -b & a & \\ \hline 0 & & * \end{array}\right) = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(f_A)$

con $\mathcal{W} = \{ w_R, w_{Ig}, \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{base di un complementare } A\text{-stabile}} \}$