Geo 1 - mod A - Lez 30 - 9/1/2024

Note Title

<u>Ricordo</u>: • Sia $\varphi: V \longrightarrow V$ endomorfismo (applicazione K-lineare)

Se esistono $\underset{\substack{\#\\ 0}}{v} \in V$ e $\lambda \in K$ t.c. $\varphi(v) = \lambda v$

v si dice autovettore di φ

λ . . . - - autovalore di φ

• Autovettori relativi ad autovalori distinti sono l. indip:

$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$ se $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ per $i \neq j$

• $p_A(x) := \det(x\mathbb{1}_n - A) = (-1)^n \det(A - x\mathbb{1}_n)$ ha grado n

Criterio di triangolarizzabilità: A triangolarizzabile $\Leftrightarrow$ $p_A(x) = \prod (x - \lambda_i)^{m_i}$

λ_i sono tutti e soli gli autov. di A

$m_i = M(\lambda_i)$

con $\lambda_i \in K$

I Criterio di diagonalizzabilità: A diagonalizz. $\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; p_A(x) = \prod (x-\lambda_i)^{m_i} \quad \lambda_i \in K \\ ② \; N(\lambda_i) = M(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i \end{cases}$

<u>Osservazioni</u>: •) Se $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$T e_1 \in \langle e_1 \rangle$

$a_{12} e_1 + \lambda_2 e_2 \rightsquigarrow T e_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle$

$\vdots$

$T e_j \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$

$\vdots$

Se $\varphi: V \to V$ è triangolarizzabile
esiste una base $\{v_1, \dots v_n\}$ t.c. $\varphi(\langle v_1, \dots v_j \rangle) \subseteq \langle v_1, \dots v_j \rangle$

$(T - \lambda_1 \mathbb{1})(e_1) = 0 \qquad (T - \lambda_2 \mathbb{1}) e_2 \in \langle e_1 \rangle \quad \dots \quad (T - \lambda_j e_j) \in \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle \quad \dots$

Ad es.

$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad T - 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad T - 5\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Infatti: $(T - \lambda_j)(e_j) = T(e_j) - \lambda_j e_j = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + \dots + \cancel{\overset{\lambda}{\overset{\|}{a_{jj}}} e_j} - \cancel{\lambda_j e_j}$

$(T - 5\mathbb{1})(T - 3\mathbb{1})(T + \mathbb{1})(e_1) = (T - 3\mathbb{1})(4e_1) = 0, \; \cancel{(T-5\mathbb{1})}(T - 3\mathbb{1})(T + \mathbb{1})(e_2) = (T - 3\mathbb{1})(2e_1) = 0 \quad \overset{0}{\overset{\|}{(T-5\mathbb{1})(T-3\mathbb{1})(T+\mathbb{1})e_3}}$

• $(T - \lambda\mathbb{1})(T - \mu\mathbb{1}) = (T - \mu\mathbb{1})(T - \lambda\mathbb{1}) \qquad \lambda, \mu \in K$

$\underline{T^2} - \underbrace{\lambda\mathbb{1}T}_{*} - \underline{T(\mu\mathbb{1})} + \underline{\lambda\mu\mathbb{1}} \overset{?}{=} \underline{T^2} - \underline{\mu\mathbb{1}T} - \underbrace{T(\lambda\mathbb{1})}_{*} + \underline{\mu\lambda\mathbb{1}} \qquad$ sì

• Più in generale
se $B \in M_n(K)$
$$\left.\begin{aligned} &(B^m + a_1 B^{m-1} + \dots + a_m \mathbb{1})(B^s + b_1 B^{s-1} + \dots + b_s \mathbb{1}) = \\ &= (B^s + b_1 B^{s-1} + \dots b_s \mathbb{1})(B^m + a_1 B^{m-1} + \dots + a_m \mathbb{1}) \end{aligned}\right.$$

controllare o usare ev_A sotto!

§ Hamilton - Cayley

Sia $A \in M_n(K)$ e considero $ev_A : \underset{\swarrow\ \text{anello commutativo}}{K[x]} \longrightarrow M_n(K)$

$$\begin{aligned} x &\longmapsto A \\ x^2 &\longmapsto A^2 \\ a_0 + a_1 x + \dots a_m x^m &\longmapsto a_0 I_n + a_1 A + \dots a_m A^m \\ \shortparallel \quad & \qquad\quad \shortparallel \\ q(x) &\longmapsto q(A) \end{aligned}$$

$n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad q(x) = x^2 - x + 5$ $\quad q(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ & \ \end{pmatrix}$

- ev_A è un omomorfismo di anelli.

<u>Osservazione</u> se $B = H^{-1} A H$ e $q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r$

$$q(B) = H^{-1} q(A) H \in M_n(K)$$

<u>Dim</u> $q(B) = \sum_{j=0}^{r} a_j B^j =$

$$= \sum_{j=0}^{r} a_j H^{-1} A^j H = \sum_{j=0}^{r} H^{-1} (a_j A^j) H$$

$$= H^{-1} \left(\sum_{j=0}^{r} a_j A^j \right) H = H^{-1} q(A) H$$

NB $\quad B^j = H^{-1} A^j H$

$B^2 = H^{-1} A \cancel{H H^{-1}} A H = H^{-1} A^2 H$

per induzione

Teorema di Hamilton - Cayley

$\varphi \in End(V)$ $\qquad p_\varphi(x)$

Siano $A \in M_n(K)$ e $p_A(x) \in K[x]$ il suo polinomio caratterist.

$p_\varphi(\varphi) = 0 \in End(V)$

Allora $p_A(A) = 0 \in M_n(K)$ ossia $ev_A(p_A) = 0$

<u>Dim</u> <u>Passo 1</u> Posso assumere che tutti gli autovalori di A siano in K

Sia $K' \supseteq K$ campo dove $p_A(x)$ ha tutti i suoi zeri

$$\begin{tikzcd} K[x] \arrow[r, "ev_A"] \arrow[d, "\text{omom. di anelli}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{commuta.}"] & M_n(K) \arrow[d, "\text{omom di anelli}"] \\ K'[x] \arrow[r, "ev_A"] & M_n(K') \end{tikzcd}$$

Dunque se $p_A(A) = 0$ visto in $M_n(K')$ e visto $p_A(x) \in K'[x]$

si ha pure $p_A(A) = 0$ .... $M_n(K)$ ..... $p_A(x) \in K[x]$

Dunque d'ora in poi assumo che $K = K'$.

<u>Passo 2</u>: Posso assumere che A sia triangolare superiore

So che $H^{-1} A H = T$ $\swarrow$ esiste H perché A ha tutti gli autovalori in K. e $p_A(x) = p_T(x)$.

$$p_A(A) = 0 \iff H^{-1} p_A(A) H = 0 \iff p_A(T) = 0 \iff p_T(T) = 0$$

Passo 3 Sia $A = T = \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$. Mostriamo che $p_A(A) = 0$

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - d_i) \qquad p_A(A) = \prod_{i=1}^{n} (A - d_i \mathbb{1}) \in M_n(K)$$

Si osserva che $p_A(A) = 0$

Infatti $p_A(A) \cdot e_1 = \prod_{i \geq 2} (A - d_i \mathbb{1}) \cdot \underbrace{(A - d_1 \mathbb{1}) e_1}_{0} = 0$

$$p_A(A) e_2 = \prod_{i \geq 3} (A - d_i \mathbb{1}) \underbrace{(A - d_1 \mathbb{1}) \underbrace{(A - d_2 \mathbb{1}) e_2}_{d e_1}}_{0} = 0$$

$$p_A(A) e_j = \prod_{i > j} (A - d_i \mathbb{1}) \underbrace{(A - d_1 \mathbb{1}) \cdots \underbrace{\underbrace{(A - d_j \mathbb{1}) e_j}_{\in \langle e_1, \dots e_{j-1} \rangle}}_{\langle e_1, \dots e_{j-2} \rangle}}_{0}$$

$p_A(A) = 0$ perché uccide tutti i vettori di base

■

Esercizio (per casa)

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Verificare che

$p_A(A) = 0$ ossia $(A - 2\mathbb{1})(A + \mathbb{1})(A - 3\mathbb{1}) = 0$

- $\underset{\neq 0}{\operatorname{Ker} ev_A}$ è un ideale $= (m_A(x))$

principale perché $K[x]$ è PID

polinomio monico che genera il nucleo detto POLINOMIO MINIMO

e $m_A(x) \mid p_A(x)$.

Lemma Sia $A \in M_n(K)$. Allora $\lambda \in K$ è zero di $m_A(x) \iff$ λ è zero di $p_A(x)$

Dim $\Rightarrow$) banale $p_A(x) = m_A(x) \cdot q(x)$ se $m_A(\lambda)=0 \Rightarrow p_A(\lambda)=0$.

$\Leftarrow$) Eventualmente allargando K posso assumere che gli zeri di $m_A(x)$ e quelli di $p_A(x)$ siano tutti in K.

$$m_A(x) = \prod_{j=1}^{t} (x-\mu_j) \quad e \quad p_A(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-\lambda_i)$$

autovalori

Sia λ un autovalore di A; $Av = \lambda v$ $v \neq 0$ $v \in K^n$.

So che $m_A(x) \in \operatorname{Ker} ev_A \Rightarrow m_A(A) = 0 \Rightarrow \prod_{j=1}^{t}(A-\mu_j \mathbb{1}) = \underset{M_n(K)}{0}$

$$\prod_{j=1}^{t}(A-\mu_j \mathbb{1}) \cdot v = 0 \in K^n$$

$$0 = (A-\mu_1 \mathbb{1}) \cdot \ldots \cdot \underbrace{(A-\mu_t \mathbb{1})v}_{Av-\mu_t v \,=\, \lambda v - \mu_t v \,=\, (\lambda-\mu_t)v} =$$

$$(A-\mu_1\mathbb{1}) \cdots (A-\mu_{t-1}\mathbb{1})(\lambda-\mu_t)v = (\lambda-\mu_t)\prod_{j=1}^{t-1}(A-\mu_j\mathbb{1})v$$

per induzione ..

$$= (\lambda-\mu_t)(\lambda-\mu_{t-1}) \cdots (\lambda-\mu_1) \underset{\neq 0}{v}$$

$\Rightarrow$ il coefficiente è nullo $\Rightarrow$ uno dei fattori $\lambda-\mu_j = 0$ ossia $\mu_j = \lambda$ $\exists$ $1 \le j \le t$

Dunque λ zero del pol. caratt. è anche zero di $m_A(x)$ $\square$

Di conseguenza: Se A è triangolarizzabile avremo

$$m_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{\rho_i} \quad e \quad p_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i} \quad \text{per opportuni } \lambda_i \in K, \ \rho_i \le m_i$$

Esempi • $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ con $d_1 \neq d_2$

$m_D(x) = (x-d_1)(x-d_2)$

$p_D(x) = (x-d_1)(x-d_2)$

- $D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $\qquad p_D(x) = (x-d)^2$

$\qquad m_D(x) = (x-d)^{\frac{1}{2}}$

$m_D(D) = 0 \qquad ev_D(x-d) = D - d\mathbb{1} = 0$

<u>Esercizio</u> Cosa succede per D matrice diagonale generica?

- $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad m_T(x) = (x-2)^{?}$ è $(x-2)^3$

$\qquad p_T(x) = (x-2)^3$

$ev_T(x-2) = T - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad m_T(x) \neq x-2$

$ev_T(x-2)^2 = T^2 - 4T + 4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dots & & \end{pmatrix} \neq 0 \qquad m_T(x) \neq (x-2)^2$

$= (T - 2\mathbb{1})(T - 2\mathbb{1})$

$T' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad m_{T'}(x) = (x-2)^{?}$ è $(x-2)^2$

$\qquad p_{T'}(x) = (x-2)^3$

$x-2$ non è pol. minimo $\qquad T' - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$(T' - 2\mathbb{1})^2 = 0$ dunque $ev_T((x-2)^2) = 0$

2° criterio di diagonalizzabilità

$A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile $\iff \begin{cases} \text{① tutti gli autovalori di } A \text{ sono in } K \\ \text{② } m_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - d_i) \text{ con } d_i \text{ distinti} \end{cases}$

<u>Osservo</u> Se $\varphi: V \longrightarrow V$ endom. e $F = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \in K[x]$

$F(\varphi) = a_0 \mathrm{id}_V + a_1\varphi + a_2\underset{\varphi\circ\varphi}{\varphi^2} + \dots + a_m \underbrace{\varphi^m}_{\substack{\varphi\circ\dots\circ\varphi \\ m \text{ volte}}} \in \mathrm{End}(V)$

Idea $\quad p_\varphi(x) \in K[x] \qquad p_\varphi(\varphi) = 0 \in \mathrm{End}$

Suppong. $\prod_{i=1}^{r}(x - d_i)^{m_i}$ $\quad d_i$ sono autoval. distinti, $m_i = M(d_i)$

Il lemma di decomp. dice che $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$

ove $V_i = \mathrm{Ker}(\varphi - d_i\,\mathrm{id})^{m_i}$

Per dimostrarlo serve il

Lemma di decomposizione:

Sia $\varphi : V \to V$ endomorfismo e sia $F(x) \in K[x]$ t.c. $F(\varphi) = 0 \in End(V)$.
Supponiamo $F = F_1 \cdots F_r$ con $F_i(x) \in K[x]$ non costanti e 2 a 2 coprimi
Detti: $V_i := \ker F_i(\varphi)$ si ha $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = V$ e inoltre
i V_i sono φ-stabili ossia $\varphi(V_i) \subseteq V_i$.

Osservo: se $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ con $\varphi(V_i) \subseteq V_i$ e $\mathcal{V}$ è base di V ottenuta unendo basi dei V_i $\Rightarrow$ $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots B_r \end{pmatrix}$

- Esempio di applicazione: $F(x) = p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i}$
  $V = \ker(\varphi - \lambda_1 id)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(\varphi - \lambda_r id)^{m_r}$
- Lemma decomp. per le matrici: (traduzione!)

Sia $A \in M_n(K)$ e sia $F(x) \in K[x]$ t.c. $F(A) = ev_A(F) = 0 \in M_n(K)$
Supponiamo $F = F_1 \cdots F_r$ con $F_i(x) \in K[x]$ non costanti e 2 a 2 coprimi
Detti: $V_i := \ker F_i(A) \leq K^n$, allora $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = K^n$ e inoltre
i V_i sono A-stabili ossia $Av \in V_i$ $\forall v \in V_i$.

Dim (2° criterio) $\Leftarrow$) Suppongo che ① e ② siano soddisf.
$m_A(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)$ con λ_i a 2 a 2 distinti in K

Allora per L. di decomposizione, sapendo che $m_A(A) = 0$
ho che $K^n = \underbrace{\ker(A - \lambda_1 \mathbb{1})}_{\text{autosp. } V_{\lambda_1}} \oplus \underbrace{\ker(A - \lambda_2 \mathbb{1})}_{= V_{\lambda_2}} \cdots \oplus \underbrace{\ker(A - \lambda_r \mathbb{1})}_{= V_{\lambda_r}}$

$\Rightarrow K^n$ ha base formata da autovettori $\Rightarrow A$ è diagonalizz.

$\Rightarrow$) Se A è diagonalizzabile $H^{-1} A H = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_A(x) = p_D(x)$ Tutti gli autovalori in K.
$m_A(x) = m_D(x)$ $\longrightarrow$ è prodotto di termini lineari distinti

$\square$