Geo 1 - mod A - Lez 29 - 8/1/2024

Note Title

Ricordo: Sia $\varphi: V \longrightarrow V$ endomorfismo (applicazione K-lineare)

Se esistono $\underset{\neq 0}{v} \in V$ e $\lambda \in K$ t.c. $\varphi(v) = \lambda v$

v si dice autovettore di φ

λ . . . . . autovalore di φ

Se $A \in M_n(K)$ gli autovettori / autovalori di A sono

gli autovettori / autovalori di $f_A: K^n \longrightarrow K^n$, $x \longmapsto Ax$

ossia $\underset{\neq 0}{x} \in K^n$ t.c. $Ax = \lambda x$ con $\lambda \in K$

Se $A = \alpha_{\mathcal{V}}(\varphi)$ allora: • $\lambda^{\in K}$ è autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ è autovalore di A

base fissata di V

• $v \in V$ è autovettore di $\varphi \Leftrightarrow \alpha_{\mathcal{V}}(v) = x \in K^n$ è autovettore di A

Infatti λ autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \exists \underset{\neq 0}{v} \in V$ t.c. $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$ *

$x := \alpha_{\mathcal{V}}(v)$ sono le coordinate di v risp. a $\mathcal{V}$

Le coord. di $\varphi(v)$ risp. a $\mathcal{V}$ sono Ax; le coord di λv risp. a $\mathcal{V}$ sono λx.

* Dice che $Ax = \lambda x$

Def • Si dice <u>spettro</u> di φ l'insieme degli autovalori di φ

• . . . . . . di A . . . . . . di A.

• Se λ è autovalore di φ e $V_\lambda(\varphi) = V_\lambda$ è il relativo autospazio

$\dim V_\lambda$ è detta <u>nullità</u> $= N(\lambda)$ o <u>molteplicità geometrica</u> di λ.

$$\dim V_\lambda = \dim \{v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = \lambda v\}$$

$$= \dim \{v \in V \text{ t.c. } (\varphi - \lambda \cdot id_V) v = 0\}.$$

$$= \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\, id_V)$$

$N(\lambda)$ è la dim di un nucleo!

NB nullità di $\varphi = \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 0\, id_V)$ è maggiore di $0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in K$ è un autovalore.

NB Se λ è un autovalore di φ allora la nullità di λ è sempre ≥ 1. Infatti: $N(\lambda) = \dim V_\lambda$ e $V_\lambda \neq 0$ perché esiste un autovettore in V_λ

Abbiamo già visto: $\varphi : V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile $\iff$ V ammette base formata da autovettori di φ.

In particolare, se $\{v_1, \dots v_n\} = \mathcal{V}$ è base formata da autovettori

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{con } d_i \text{ autovalori di } v_i$$

Abbiamo già visto che se v_1, v_2 sono autovett. relativi a autovalori $d_1 \neq d_2$ allora v_1, v_2 sono l. indip.

Lemma Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ endomorfismo e siano $d_1, \dots, d_r$ autovalori distinti di φ. Allora $V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \dots \oplus V_{d_r} \leq V$

Dim

Ci serve: Esercizio se $W_i \leq V$, $1 \leq i \leq r$ $W_1 + \dots + W_r$ è somma diretta se e solo se vale: $w_1 + \dots + w_r = 0$ con $w_i \in W_i$ $\Rightarrow w_i = 0$ $\forall i$

Sugg: ricordare che una somma è diretta se c'è unicità di scrittura $w_1 + \dots + w_r = w_1' + \dots + w_r' \iff w_i = w_i'$ $\forall i$

Dimostriamo il risultato per induzione su r.

Il caso $r = 1$ è banale.

Suppongo che il risultato sia vero per $r-1$ (con $r > 1$) ossia $V_{d_1} \oplus \dots \oplus V_{d_{r-1}}$ e dimostro che è vero per r.

Sia $v_1 + v_2 + \dots + v_r = 0$ (I) con $v_i \in V_{d_i}$

Allora $\varphi(v_1 + v_2 \dots + v_r) = 0$

$$\sum \varphi(v_i) = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_r v_r = 0 \quad \text{(II)}$$

(II) $- d_r$(I) $\quad (d_1 - d_r)v_1 + (d_2 - d_r)v_2 + \dots + (d_{r-1} - d_r)v_{r-1} = 0$

Per ipot. induttiva $\underbrace{(d_i - d_r)}_{\neq 0} v_i = 0 \quad 1 \leq i \leq r-1$

$\Rightarrow v_i = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq r-1$

Dunque in (I) $0 + \dots 0 + v_r = 0 \Rightarrow$ anche $v_r = 0$

Dunque $v_i = 0$ $\forall$ $1 \leq i \leq r$.

Dunque concludo che ~~la~~ la ~~somma~~ è diretta

$\boxtimes$

Abbiamo pure visto: λ è autovalore di $\varphi \iff \det(\varphi - \lambda\, id_V) = 0$

$\iff \det(\lambda\, id_V - \varphi) = 0$

Dunque λ è autovalore di $A \iff \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0$

<u>Def</u> Sia $A \in M_n(K)$. Si dice <u>polinomio</u> <u>caratteristico</u> di A il polinomio $p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A) \in K[x]$

Osservo: grado di $p_A(x)$ è n; $\begin{pmatrix} x - \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & x - \cdots \end{pmatrix}$ nello sviluppo del determinante x^n non è cancellabile da nulla

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad p_A(x) = x^2 - 2x + 3$

$(x\mathbb{1}_2 - A) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix}$ che ha determinante

$(x-1)(x-1) + 2 = x^2 - 2x + 3$

<u>Osservazione</u> 1) Gli zeri in K di $p_A(x)$ sono esattamente gli autovalori di A.

Nel caso sopra se $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ non vi sono autovalori in $\mathbb{R}$, ma in $\mathbb{C}$

2) Sia $B = P^{-1}AP$, ossia B simile ad A. (rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse)

$p_B(x) = \det(x\mathbb{1}_n - B) \overset{?}{=} \det(x\mathbb{1} - A) = p_A(x)$

Infatti: $\det(x\mathbb{1}_n - B) = \det(x\mathbb{1}_n - P^{-1}AP)$

NB $x\mathbb{1}_n = (x\mathbb{1})P^{-1}P = P^{-1}x\mathbb{1}P$ $\quad = \det(P^{-1}(x\mathbb{1}_n)P - P^{-1}AP)$

$= \det(P^{-1}(x\mathbb{1}_n - A)P) \overset{\text{Binet}}{=} \det(P^{-1}) \cdot \det(x\mathbb{1}_n - A)\det P$

$= \frac{1}{\cancel{\det P}} \cdot \det(x\mathbb{1}_n - A) \cdot \cancel{\det P} = \det(x\mathbb{1}_n - A)$

Ricordo $A \in M_n(K)$ è triangolarizzab. se $\exists\, P \in GL_n(K)$ t.c. $P^{-1}AP = T$ triang.

ossia A è simile a T triangolare.

<u>Criterio di triangolarizzabilità di una matrice</u> (di un endomorfismo φ)

$A \in M_n(K)$ ($\varphi \in End(V)$) è triangolarizzabile (su K) $\iff p_A(x)$ ($p_\varphi(x)$) ha tutti gli zeri in K.

Dim $\Rightarrow$) Se A simile a T triangolare, $T = \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = p_T(x) = \det\big(\underbrace{x\mathbb{1}_n - T}_{\begin{pmatrix} x-d_1 & & * \\ & x-d_2 & \\ 0 & & \ddots \; x-d_n \end{pmatrix}}\big) = \prod_{i=1}^{n}(x-d_i) \qquad d_i \in K$$

$\Leftarrow$) Procedo per induzione su n. se $n=1$ è banalmente triangolarizzabile

Sia $n>1$ e suppongo che $p_A(x)$ abbia tutti gli zeri in K.
Sia $d_1 \in K$ uno di questi, ossia d_1 è autovalore di A e sia $0 \neq v_1$ un autovettore di A per l'autovalore d_1.

Sia $\{\underset{\text{l'autovettore}}{v_1}, v_2, \dots v_n\} = \mathcal{V}$ base di K^n. La matrice $A' = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f_A) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{d_1} & * * * * \\ 0 & \\ 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$

è simile ad $A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A)$. Dunque $p_A(x) = p_{A'}(x) = \det(x\mathbb{1} - A')$

$$= (x-d_1) \cdot \underbrace{\det(x\mathbb{1}_{n-1} - B)}_{p_B(x)}$$

Lavorando per induzione, osservo che $p_B(x)$ ha tutti gli zeri in K perché gli zeri di p_B sono zeri di $p_A(x)$ e dunque per ipotesi induttiva B è triangolar.

Dunque esiste $Q \in GL_{n-1}(K)$ t.c. $Q^{-1}BQ$ sia triangolare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{b}^{n-1 \text{ entrate}} \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & bQ \\ 0 & BQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bQ \\ 0 & \underset{\text{tr. superiore}}{Q^{-1}BQ} \end{pmatrix}$$

è triangolare superiore. $\square$

Esempi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ triangolarizzabile

$\det(x\mathbb{1} - A) = (-1)^3 \det(A - x\mathbb{1})$

$\det(A - x\mathbb{1}) = (2-x)\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix}$

$= (2-x)[\,x^2 - 1 - 3\,] = (2-x)(x-2)(x+2)$
$= -(x-2)^2(x+2)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ no triangolarizzabile su $\mathbb{R}$

$\det(x\mathbb{1} - B) = x^2 - 1 + 3 = x^2 + 2$

Esercizio $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ Calcolare autovalori, autospazi e verificare che è diagonalizzab.

Passo 1) Calcolo autovalori di A. $p_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A) = (-1)^n \det(A - x\mathbb{1})$

$$\begin{vmatrix} -x & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3-x \end{vmatrix} = (-3-x)(1-x)\begin{vmatrix} -x & -2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (x-1)(x+3)\left[x^2-3x+2\right] = (x-1)^2(x-2)(x+3)$$

$\lambda = 1$ $\quad N(1) = 2$ $\quad M(1) = 2$

$\lambda = 2$ $\quad N(2) = 1$ $\quad M(2) = 1$

$\lambda = -3$ $\quad N(-3) = 1$ $\quad M(-3) = 1$

Passo 2) Calcolo gli autospazi

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - \mathbb{1}) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \dim V_1 = 2$$

$$V_2 = \operatorname{Ker}(A - 2\mathbb{1}) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ Controllare $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Passo 3) Trovo base formata da autovettori e la matrice H t.c. $H^{-1}AH$ sia diagonale

Osservo $V_1 \oplus V_2 \oplus V_{-3} = \mathbb{R}^4$. Dunque ho basi di $\mathbb{R}^4$ formate da autovettori di A.

Ad esempio $$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underbrace{H^{-1}}_{\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{V}}(id)}\ \underbrace{A}_{\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A)}\ \underbrace{H}_{\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{E}}(id)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f_A)$$

facile

Dunque $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def. Sia λ autovalore di A. Si dice molteplicità algebrica di λ il massimo esponente m t.c. $(x-\lambda)^m$ divide $p_A(x)$

Esempio: $p_A(x) = (x-3)^5(x+1)^4$ $\quad M(3) = 5, \quad M(-1) = 4$

Lemma Siano $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore.

Allora $1 \leq N(\lambda) \leq M(\lambda) \leq n$

Dim
- $N(\lambda) \geq 1$ banale perché $1 \leq \dim V_\lambda = N(\lambda)$ perché $V_\lambda \neq 0$
- $M(\lambda) \leq n$ " perché grado $p_A(x) = n$
- Ora dimostro $N(\lambda) \leq M(\lambda)$

Sia $N = N(\lambda)$ e sia $v_1, \dots, v_N$ una base di V_λ

La completo ad una base di $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_N, v_{N+1}, \dots v_n\}$

$A' = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f_A)$ è simile ad A $\qquad A v_i = \lambda v_i$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_N & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$p_{A'}(x) = \det\left(x\mathbb{1} - A'\right) = \det\begin{pmatrix} \boxed{x\mathbb{1}_N - \lambda\mathbb{1}_N} & * \\ 0 & \boxed{x\mathbb{1} - *} \end{pmatrix} = \left(\text{determ. a blocchi}\right)$$

$= (x-\lambda)\mathbb{1}_N$

$$= (x-\lambda)^N \cdot \det(x\mathbb{1} - *) \underset{\uparrow}{=} p_A(x)$$

perché $A' \sim A$

$\Rightarrow (x-\lambda)^N \mid p_A(x)$ (divide) $\Rightarrow N \leq M(\lambda)$ ↑ massimo esponente. ☐

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad p_A(x) = (x-2)^2$ $\qquad \lambda = 2$ autovalore, $M(2) = 2$

$V_2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle \Rightarrow N(2) = 1 < M(2)$

1° criterio di diagonalizzabilità

$A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} ① \ p_A(x) \text{ ha tutti gli zeri in } K \\ ② \ N(\lambda) = M(\lambda) \ \forall \lambda \text{ autovalore di } A \end{cases}$

Dim $\Rightarrow$) Sia A diagonalizzabile

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ M_n(K)}}{D} . \qquad p_A(x) = p_D(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

① ok

Scrivo vicini gli autovalori uguali

$$\underbrace{\mu_1 \dots \mu_1}_{M(\mu_1)} \quad \underbrace{\mu_2 \dots \mu_2}_{M(\mu_2)} \quad \dots \quad \underbrace{\mu_s \dots \mu_s}_{M(\mu_s)} \qquad p_A(x) = \prod (x-\mu_i)^{M(\mu_i)}$$

Osservo che A diagonalizzabile $\Rightarrow$ esiste base formata da autovettori $V_{\mu_1} \oplus \dots \oplus V_{\mu_s} \overset{\leq}{=} K^n$

uguale perché gli autovettori generano

$$N(\mu_1) + \dots + N(\mu_s) = n$$

$$M(\mu_1) + \dots M(\mu_s) = n \qquad \text{e} \qquad N(\mu_i) \leq M(\mu_i) \ \forall i$$

Dunque $M(\mu_i) = N(\mu_i) \ \forall i$. Dunque ② ok.

$\Leftarrow$) Suppongo verificate ① e la ②

$$V_{\mu_1} \oplus \dots \oplus V_{\mu_s} = V$$

$$\sum \dim V_{\mu_i} = \sum M(\mu_i) = n \Rightarrow$$

Quindi esiste base formata da autovettori! A è diagonalizz.

■

NB Se $p_A(x) = (x-\mu_1)^{m_1} \dots (x-\mu_s)^{m_s}$ e grado di $p_A(x) = n$

allora $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$