Geo 1 -mod A - Lez 28 - 20/12/2023

Note Title

§ Forme canoniche di matrici

Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare $\quad \mathcal{V}$ base di V

$\mathcal{W}$ " " $W \qquad A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$

- Se $v \in V$ ha coord. $x \in K^n$ risp. a $\mathcal{V}$ e $f(v) \in W$ ha coord $y \in K^m$ risp. $\mathcal{W}$ allora $Ax = y$

- Se $\mathcal{V}'$ base di V e $\mathcal{W}'$ base di $W \qquad A' = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{W}'}(f)$

$$\begin{tikzcd}
V^{\mathcal{V}} \arrow[r, "f", "A_{m\times n}"'] & W^{\mathcal{W}} \arrow[d, "id_W"', "Q_{m\times m}"] \\
V^{\mathcal{V}'} \arrow[u, "id_V"', "P_{n\times n}"] \arrow[r, "f"', "A'_{m\times n}"] & W^{\mathcal{W}'}
\end{tikzcd}$$

$A' = QAP$ $\qquad$ con $P = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{V}}(id)$

$Q = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}'}(id)$

Def Siano $A, B \in M_{m,n}(K)$. La matrice B si dice EQUIVALENTE alla matrice A se esistono $P \in GL_n(K)$ e $Q \in GL_m(K)$ t.c.

$$B = \underbrace{Q}_{m\times m}\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{P}_{n\times n}$$

Osservazione: È una relazione di equivalenza

- riflessiva $\quad A$ è eq. ad $A \qquad Q = 1_m \qquad P = 1_n$
- simmetrica: $\quad Q^{-1}P^{-1} B = Q^{-1} Q A P P^{-1} \qquad A = Q^{-1} B P^{-1}$
- Transitiva: esercizio!

Osservazione: $A, B \in M_{m,n}(K)$ sono equivalenti $\iff$ rappresentano la stessa $f: V \longrightarrow W$ rispetto a basi opportune.

dim: • $\Leftarrow$) già visto sopra.

$\Rightarrow$) sia $B = QAP \qquad A \in M_{m,n}(K)$

Sia $\mathcal{V}$ base di V e sia $\mathcal{W}$ base di W
$\{v_1, \dots v_n\}$ $\{w_1, \dots w_m\}$

Definisco $f: V \longrightarrow W$ t.c. $f(v_1) = \sum a_{i1} w_i$, .. $f(v_\ell) = \sum a_{i\ell} w_i$

Allora $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) = A$

Ora se $B = QAP$ $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$

Le base $\mathcal{V}'$ e la base $\mathcal{W}'$ t.c. $B = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{W}'}(f)$

si trovano semplicemente prendendo

$P = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{V}}(id)$ $Q = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}'}(id)$ ma $Q^{-1} = \alpha_{\mathcal{W}'\mathcal{W}}(id_W)$

↳ è dato dai vettori che hanno come coordinate le colonne di P risp. alla base $\mathcal{V}$

$\mathcal{W}'$ ha come vettori quelli che hanno per coord risp. a $\mathcal{W}$ le colonne di Q^{-1}.

Teorema (di classificazione delle matrici a meno di equivalenza)

Due matrici $A, B \in M_{m,n}(K)$ sono equivalenti $\iff rg A = rg B$.

Dim $\Rightarrow$) banale $B = QAP$ (invertibili)

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\sim", "f_P"'] \arrow[rrr, bend left, "f_B"] & K^n \arrow[r, "f_A"'] & K^m \arrow[r, "\sim", "f_Q"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$x \longmapsto Px$ $z \longmapsto Qz$

$r = rg A \overset{rg f_A =}{=} \dim Im f_A = \dim Im(f_Q \circ f_A) = \dim Im(f_Q \circ f_A \circ f_P)$
$= \dim Im f_B = rg B$.

$\Leftarrow$) Se $rg A = r$ allora A è equivalente a $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dimostrato questo: se $rg B = r \Rightarrow$

B è eq $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ è eq. a B per transitività

Sia $f = f_A : K^n \longrightarrow K^m$, $x \longmapsto Ax$ $A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A)$

Sia $\mathcal{W}$ base di K^m così costruita:

Sia $\mathcal{V}$ base di K^n ottenuto completando una base del nucleo:

$\mathcal{V} = \{\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{sono t.c.}}, v_{r+1}, \dots v_n\}$ con $Ker f_A = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$
$\dim Ker f_A = n - rg f_A = n - r$

$\underset{w_1}{f(v_1)}, \dots \underset{w_r}{f(v_r)}$ formano base di $Im f_A$

Sia $\mathcal{W}$ una base ottenuta completando $w_1, \dots, w_r$ a una base di K^m

$\mathcal{W} = \{ w_1, \dots w_r, w_{r+1}, \dots w_m \}$ $\qquad f(v_i) = w_i$

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f_A) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{1\!\!1_r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\boxed{//}$

Dunque:

$$M_{m,n}(K) \xrightarrow{rg} \{0, 1, \dots, s\} \qquad s := \min(m,n)$$

$$A \longmapsto rg A$$

$$M_{m,n}(K) \big/ \sim \xrightarrow{\text{biettiva}} \{0,1,\dots,s\}$$

$\sim$ equivalente

$\uparrow$ iniettiva

$\longrightarrow$ posso sempre costruire una matrice di rango $0 \le r \le s$ $\begin{pmatrix} 1\!\!1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$

Osservo:
- $O \in M_{m,n}(K)$ è l'unica di rg 0
- Se $m = n$, tutte le $\underbrace{\text{matrici invertibili}}_{\Updownarrow \; rg A = m}$ sono equiv a $1\!\!1_m$

(In alternativa: se $A \in GL_m(K)$ $\quad \underbrace{A^{-1}}_{Q} A \cdot \underbrace{1\!\!1_m}_{P} = 1\!\!1_m$)

LAVORIAMO ORA CON ENDOMORFISMI $f: V \longrightarrow V$ e

FISSIAMO LA STESSA BASE NEL DOMINIO E CODOMINIO

Def Siano $A, B \in M_n(K)$. Si dice che B è SIMILE ad A se esiste $P \in GL_n(K)$ t.c. $P^{-1} A P = B$

Oss:
- È una relaz. di equivalenza (esercizio)
- A simile a B $\Longrightarrow$ A equivalente a B $(Q = P^{-1})$

- $O \in M_n(K)$ è simile solo a sé $\qquad P^{-1} O P = O$
- $1\!\!1_n \in M_n(K)$ " - - - - - - $\qquad P^{-1} 1\!\!1 P = 1\!\!1$
- $\lambda 1\!\!1_n \in M_n(K)$ - - - - - - - - $\qquad \forall \lambda \in K$.

scalari

$$P^{-1}(\lambda 1\!\!1_n)P = \lambda P^{-1}P = \lambda 1\!\!1_n$$

Classificazione delle matrici a meno di similitudine è complicata!

Matrici interessanti

- $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ Suppongo che $f: V \longrightarrow V$ sia t.c. $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f) = D$
$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Sarà $f(v_1) = d_1 v_1$, $f(v_2) = d_2 v_2$, ... $f(v_j) = d_j v_j$

(NB) In generale $f(v) \neq d v$ se i d_j sono distinti tra loro.

(NB) d_i può essere 0.

- $T = \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & * \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ Suppongo che $f: V \longrightarrow V$ sia t.c.
$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f) = T$ $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$f(v_1) = d_1 v_1$ $f(\langle v_1 \rangle) \subseteq \langle v_1 \rangle$

$f(v_2) = a_{12} v_1 + d_2 v_2$ $f(\langle v_1, v_2 \rangle) \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$

$f(v_3) = a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + \underset{a_{33}}{\underset{\shortparallel}{d_3}} v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\Rightarrow f(\langle v_1, v_2, v_3 \rangle) \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Def. • Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice diagonalizzabile (risp. triangolarizzabile) se esiste una $P \in GL_n(K)$ t.c. $P^{-1} A P$ sia una matrice diagonale (risp. triangol. super.) ossia se A è simile a una matrice diagonale (risp tr. sup.)

• Un endomorf $f: V \longrightarrow V$ si dice diagonalizz (risp. triangolarizzabile) se $\exists$ una base $\mathcal{V}$ di V t.c. $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f)$ sia diagonale (risp. triang. sup.).

Osservo f diagonalizz. $\iff \exists$ base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V (NB: $v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0$)

t.c. $f(v_i) = d_i v_i$ con $d_i \in K$.

$$\left(D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f) \right)$$

Def Sia $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo

- Un vettore $0 \neq v \in V$ si dice autovettore di f se esiste un $d \in K$ t.c. $f(v) = dv$
- Uno scalare $d \in K$ si dice autovalore di f se esiste un $V \ni v \neq 0$ t.c. $f(v) = dv$

NB $v \neq 0$ ma d può essere 0.

Criterio banale di diagonalizzabilità:

$f: V \to V$ è diagonalizzabile $\iff$ V ammette una base formata da autovettori di f

(visto sopra)

Lemma Sia $f: V \to V$ ~~un~~ endomorf e siano v_1 autovettore di autovalore d_1 e v_2 autovettore di autovalore d_2 con $d_1 \neq d_2$. Allora v_1 e v_2 sono l. indip.

Dim $f(v_1) = d_1 v_1$ $\quad f(v_2) = d_2 v_2$ per ipotesi

Sia $av_1 + bv_2 = 0$ $\quad 0 = f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2) = d_1 a v_1 + d_2 b v_2$

$$\begin{cases} av_1 + bv_2 = 0 \\ d_1 a v_1 + d_2 b v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} av_1 = -bv_2 \\ -d_1 b v_2 + d_2 b v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \overset{\neq 0}{v_1} = 0_V \Rightarrow \boxed{a = 0} \\ \underbrace{(d_2 - d_1)}_{\neq 0} \cdot \boxed{b = 0} \; \underset{\neq 0_V}{v_2} = 0 \end{cases}$$

Dunque v_1, v_2 l. indip. $\square$

Sia $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo e sia λ un autovalore di f.

$V_\lambda(f) := \{0_V\} \cup \{$ autovettori di $f\}$ lo chiamo **autospazio** relativo all'autovalore λ

$f(0_V) = \lambda 0_V$

è un sottospazio vettoriale di V.

$V_\lambda(f) = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) = \lambda v \}$

Se $v, v' \in V_\lambda(f)$

$f(av + bv') = af(v) + bf(v') = a\lambda v + b\lambda v' = \lambda(av + bv')$

$\Rightarrow av + bv' \in V_\lambda(f)$ che è dunque sottosp.

Se mostro che dati $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalori di f

$\underbrace{V_{\lambda_1}(f)}_{\text{base sarà data da autovettori}} \oplus \underbrace{V_{\lambda_2}(f)}_{\text{base idem}} \oplus \dots \oplus \underbrace{V_{\lambda_r}(f)}_{\text{base}} = V$

allora ottengo una base di V formata da autovettori unendo basi degli autospazi!

devo vedere che gli autospazi sono in $\oplus$

$V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}(f) \subseteq V$

trovare condizioni affinché questa sia una $=$

In generale un endom f non è diagonalizzabile, non ci sono autovettori e autovalori (penso a rotazione con $\theta \neq k\pi$ in $\mathbb{R}^2$)

Lemma $\lambda \in K$ è autovalore di $\varphi: V \to V \iff \det(\varphi - \lambda \, id_V) = 0$

Dim $\lambda \in K$ è autovalore di $\varphi \iff \exists\, v \neq 0$ in V t.c. $\varphi(v) = \lambda v$

$\iff \varphi(v) - \lambda v = 0_V \overset{\exists v \neq 0}{\iff} \varphi(v) - (\lambda \, id_V)(v) = 0_V \quad \exists\, v \neq 0$

$\iff (\varphi - \lambda \, id_V)(v) = 0_V \quad \exists\, v \neq 0 \iff \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \, id_V) \neq 0$

$\iff \operatorname{rango}(\varphi - \lambda \, id_V) < n = \dim V \iff \det(\varphi - \lambda \, id_V) = 0$

$\square$

Ci dà metodo per calcolare gli autovalori

Ricordo che $\det f = \det A$ con A una matrice qualsiasi associata a f

Per trovare gli autovalori, se $A = \alpha_{vv}(\varphi)$

devo trovare i λ t.c. $\det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = 0$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_2) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4$$

$$= -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \underset{(x-a)(x-b)}{\lambda^2 + \lambda - 2} = (\lambda+2)(\lambda-1)$$

Dunque autovalori sono $\lambda = -2$, $\lambda = 1$.