Lezione 16 (15 dicembre 2023)

Interpolante di Newton

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + b_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

l'idea di Newton è usare come base

$$\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$$

Si tratta di capire chi sono i coefficienti b_i $i=0,\dots,n$

b_i = differenze divise di ordine i della funzione f

Definizione

Dati $n+1$ punti distinti $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$

e i valori $y_i = f(x_i)$

la D.D. (sta per differenze divise) di ordine 0

$$f[x_i] = f(x_i)$$

la DD di ordine 1

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

e ricorsivamente, DD di ordine k

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Esempio

$\{-1, 2, 3, 5\}$ $\qquad f(x) = x^2 - x + 1$

x_i	DD0	DD1	DD2	DD3
-1	3			
2	3	0		
3	7	4	$\frac{4}{4} = 1$	
5	21	7	$\frac{3}{3} = 1$	0

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Le D.D. generano uno schema di tipo triangolare che si ritrova spesso in analisi numerica

P1 (Proprietà 1)

La DD di ordine $k+1$ di un polinomio di grado k è nulla

Se prendo $f(x) = x^3 - 1$ la DD di ordine 4 è nulla.

x_i	DD0	DD1	DD2	DD3	
0	-1				
1	0	1			
2	7	7	3		
3	26	19	6	1	
4	63	37	9	1	0

Se f non è un polinomio non è vero (verificatelo voi)

P2 (Proprietà 2)

Le DD sono invarianti rispetto all'ordine dei nodi. Ovvero

$$f[x_0, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$$

dove $(i_0, \dots, i_k)$ è una permutazione di $(0, \dots, k)$

Esempio Consideriamo $f(x) = x^2 - x + 1$

invece di $\{-1, 2, 3, 5\}$ prendiamo $\{2, -1, 3, 5\}$

x_i	DD0	DD1	DD2	DD3
2	3			
-1	3	0		
3	7	1	1	
5	21	7	1	0

Il polinomio d'interpolazione in forma di Newton è quindi

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots \qquad (1)$$
$$+ f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

È vero che interpola f nei nodi x_i?

$$p_n(x_0) = f(x_0) + 0 + \dots + 0 = f(x_0) \checkmark$$

$$p_n(x_1) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x_1-x_0) + 0 + \dots + 0$$
$$= \cancel{f(x_0)} + \frac{f(x_1) - \cancel{f(x_0)}}{\cancel{x_1 - x_0}} \cancel{(x_1 - x_0)}$$
$$= f(x_1) \quad \checkmark$$

E così via per $x_2, \dots, x_n$.

Essendo p_n in forma di Newton interp. possiamo dire che è il polinomio d' interpolazione di f, per il teorema di esistenza e unicità dell'interpolante

Esso coincide con

$$(2) \quad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

a_i calcolati risolvendo il sistema di Vandermonde

e

$$(3) \quad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

↳ polinomi elem. di Lagrange

base monomiale	base di Lagrange	base di Newton
$\text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$	$\text{span}\{l_0, \dots, l_n\}$	$\text{span}\{1, x-x_0, \dots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$
Polinomio con formula (2)	polinomio con formula (3)	polinomio nella forma (1)

Vantaggio della forma di Newton

Per passare da p_n a p_{n+1}, cioè da un polinomio di grado n costruito su $\{x_0, \dots, x_n\}$ al polinomio p_{n+1} costruito su $\{x_0, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DD di ordine } n+1}}{b_{n+1}} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (4)$$

$$b_{n+1} = f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

Esempio

Consideriamo $f(x) = e^{x-1}$ e i punti $\{0, 2, 3, 5\}$

x_i	y_i	DD 1		
0	e^{-1}			
2	e	$\frac{e-e^{-1}}{2}$		
3	e^2	e^2-e	$\frac{e^2-2e+e^{-1}}{3}$	
5	e^4	$\frac{e^4-e^2}{2}$	$\frac{e^4-3e^2+2e}{6}$	$\frac{e^4-6e^2+8e-3e^{-1}}{30}$

$$p_2(x) = e^{-1} + \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)(x-0) + \frac{e^2-2e+e^{-1}}{2} \times (x-2)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{e^4-6e^2+8e-3e^{-1}}{30} \times (x-2)(x-3)$$

P3 (Proprietà 3)

$$f[x_i, x_i] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{x_i + h - x_i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } \exists f' \text{ in } x_i}}{=} f'(x_i)$$

posso estendere al caso generale

Se $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$, $[a,b]$ contiene x_0

$$f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Pertanto al limite, quando tutti i punti d'interpolazione coincidono con un punto x_0, il polinomio di Newton sarà

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

che coincide con il polinomio di Taylor di grado n

x_0	$f(x_0)$				
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		$\dots$	
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$		
$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$	
x_0	$f(x_0)$				$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Schema di HÖRNER

$$p_2(x) = a_0 + \underbrace{a_1 x}_{} + \underbrace{a_2 x^2}_{}$$

3 molt + 2 add.

$$p_2(x) = \underbrace{(a_2 x + a_1)}_{} x + a_0$$

2 molt + 2 add

detto schema delle moltiplicazioni annidate

Algoritmicamente

$p = b_n$ $\qquad b_n =$ è la DD di ordine n

```
for k = n-1 : -1 : 1
    p = p * (x - x_i) + b_i
end
```

- Errore d'interpolazione con la formula di Newton

Ricordando che

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Proposizione se $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[\underbrace{x_0, \dots, x_n, x}_{\text{dd di ordine } n+1}]$$

con ξ appartiene al più piccolo intervallo che contiene $x_0, \dots, x_n, x$

Dim

$x_0, \dots, x_n \qquad f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$

Sia $x \neq x_i$ che consideriamo come x_{n+1}
pertanto posso costruire il polinomio in forma di Newton di grado $n+1$

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + (t - x_0) \cdots (t - x_n) f[x_0, \dots, x_n, t]$$

Per $t = x$

$$p_{n+1}(x) = f(x)$$

Per l'errore

$$f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x)$$
$$= \underbrace{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}\, f[x_0, \dots, x_n, x]$$
$$= \omega_n(x)\, f[x_0, \dots, x_n, x]$$

Ma l'errore

$$f(x) - p_n(x) = \omega_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Segue il risultato confrontando le due formule #

Attenzione le D.D. sono generalmente instabili se costruite su punti equispaziati

Se usate sequenze di punti (es. Leja) le D.D., si dimostra, che sono molto più stabili.