Lezione 15 (13 dicembre 2023)

Costante di LEBESGUE

$$\Lambda_n(X) := \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$$

insieme dei nodi di interpolazione

X sottoinsieme di $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

Usando la costante di Lebesgue

$$\| f - p_n \|_\infty \leq (1 + \Lambda_n(X)) \| f - p_n^* \|_\infty$$

polinomio di migliore approssimazione

p_n^* esiste perché $\mathbb{P}_n$ è finito

Avevamo visto che Λ_n è la norma dell'operatore di Lagrange

$$L : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$$

$$Lf = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_j$$

con ℓ_j = polinomio di Lagrange j-esimo

Cerchiamo di chiarire

Proprietà dell'operatore di Lagrange

(i) $Lf(x_i) = f(x_i)$ interpolazione

(ii) L è lineare

- $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$
- $L^2 = L$ (cioè è idempotente)

Proviamo quest'ultima, cioè $L^2 = L$

C'è un unico elemento $u \in \mathbb{P}_n$ che interpola f cioè $u = Lf$
Naturalmente c'è un unico $u \in \mathbb{P}_n$ che interpola u, cioè $Lu = L^2 f$

Poiché $u \in \mathbb{P}_n$, u interpola u

$$\underline{L^2 f} = Lu = u = \underline{Lf}$$

(iii) La norma di un generico operatore T tra spazi normati

$$\|T\| = \sup \{ \|Tf\| : \|f\| \leq 1 \}$$

In particolare se $\|T\| < +\infty \Rightarrow T$ è limitato e ciò è equivalente alla continuità.

Non solo ma $\|Tf\| \leq \|T\| \, \|f\|$

Altro concetto è la distanza di un "punto" f da un sottospazio U di uno spazio normato

$$\mathrm{dist}(f,U) = \inf\{\ \|f-v\| : v \in U\}$$

Inoltre una mappa lineare P su uno spazio normato è una proiezione se $P^2 = P$

Segue che l'operatore di Lagrange è una proiezione su $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Lemma

La norma di L, $\|L\|$, è proprio

$$\|L\| = \sup_{x\in X} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)|}_{\lambda_n(x)} := \Lambda_n(X)$$

$\lambda_n(x)$ funzione di Lebesgue

$X \subseteq \mathbb{R}$

(nel caso usuale $X = [a,b]$)

Dim

Se $\|f\|_\infty \leq 1$

$$\|Lf\|_\infty = \sup_{x\in X} |Lf(x)| = \sup_{x\in X} \left| \sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) f(x_j)\right|$$

$$\leq \sup_{x\in X} \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)|\,|f(x_j)|$$

$$\le \underbrace{\|f\|_\infty}_{\le 1} \underbrace{\sup_{x\in X} \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)|}_{\Lambda_n} \le \Lambda_n$$

$$\Longrightarrow \quad \|L\| \le \Lambda_n$$

Per provare la disuguaglianza contraria scelgo $\xi \in X$ t.c. $\lambda_n(\xi) = \Lambda_n$

Possiamo trovare una $f \in \mathcal{C}(X)$ t.c. $\|f\|_\infty \le 1$ e t.c.

$$f(x_j) = \operatorname{sgn} \ell_j(\xi)$$

Per quest'ultima

$$\|L\| \underbrace{\|f\|}_{=1} \geqslant \|Lf\|_\infty \geqslant Lf(\xi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_j(\xi) = \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(\xi)|$$

$$= \lambda_n(\xi) = \Lambda_n$$

$$\Longrightarrow \quad \|L\| \geqslant \Lambda_n$$

Abbiamo concluso! #

Piccolo esempio di calcolo della costante di Lebesgue

Siano dati i punti equispaziati $\{0, 1, 2\}$

per calcolare $\Lambda_2(\{0,1,2\})$

devo

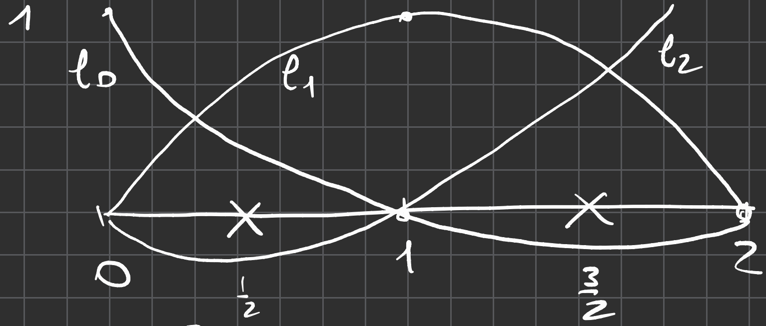
- costruire i polinomi di grado 2 di Lagrange, ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2
- Quindi devo calcolare

$$\max_{x\in[0,2]} \underbrace{\sum_{j=0}^{2} |\ell_j(x)|}_{\text{è funzione di Lebesgue che è sempre positiva quindi sempre } \geq 1}$$

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$



$$\lambda_2(x) = \sum_{j=0}^{2} |\ell_j(x)|$$

$0 \leq x \leq 1$ $\qquad \lambda_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - x(x-2) - \frac{1}{2}x(x-1)$

$$= \frac{1}{2}(x^2-3x+2) - x^2+2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{3}{2}x + 1 - x^2 + 2x - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{2}x$$

$$= -x^2 + x + 1$$

$1 \leq x \leq 2$ $\qquad \lambda_2(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2) - x(x-2) + \frac{1}{2}x(x-1)$

$$= -x^2 + 3x - 1$$

$$\Lambda_2(\{0,1,2\}) = \max\left\{ \max_{0\leq x\leq 1} \lambda_2(x), \max_{1\leq x\leq 2} \lambda_2(x) \right\}$$

$\max\limits_{0\leq x\leq 1} \lambda_2(x) \longrightarrow -2x+1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2}$ è di max

e $\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1$

$= 5/4$

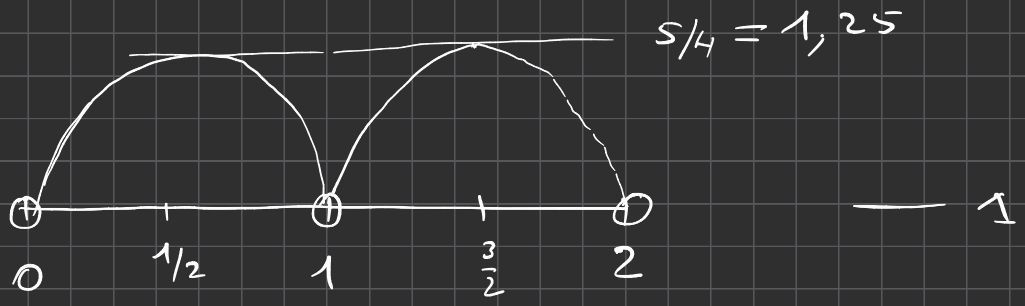
$\max\limits_{1\leq x\leq 2} \lambda_2(x) \longrightarrow -2x+3 = 0 \qquad x = 3/2$

e $\lambda_2(3/2) = -9/4 + 9/2 - 1$

$$= 5/4$$

$$\Lambda_2(\{0,1,2\}) = \max\{5/4,\ 5/4\} = \frac{5}{4}$$

funzione di Lebesgue



Osservazione

Chebyshev
Fekete

insiemi di punti

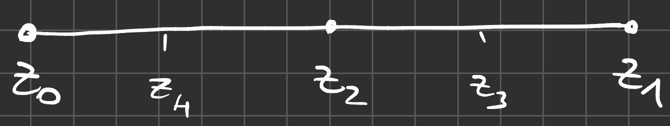
noti esplicitamente

solo nel caso unidimensionale corrispondono a quelli di Chebyshev-Lobatto

$$s_i = \cos(i\pi/n)$$

Leja

↳ sono sequenze di punti
cioè vengono calcolati uno alla volta



Costante di Lebesgue dei punti di Chebyshev

Si verifica che

$$\Lambda_n(C_n) \leq \underbrace{\frac{2}{\pi}\log(n+1)+1}_{\sigma(n)}$$

n	$\Lambda_n(C_n)$	$\sigma(n)$
2	1.189	1.699
5	1.828	2.141
10	2.232	2.527
20	2.477	2.938

Asintoticamente $\quad \Lambda_n(C_n) \simeq \sigma(n)$

Costante di Lebesgue come condizionamento del problema d'interpolazione polinomiale

$$(x_i, f(x_i)) \quad i=0,\dots,n \longrightarrow p_n$$

$$(x_i, \tilde{f}_i(x_i)) \longrightarrow \tilde{p}_n$$

valori perturbati

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty = \max_{x\in I}\left|\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\left(f(x_i)-\tilde{f}(x_i)\right)\right|$$

$$\leq \underbrace{\max_{x\in I}\sum_{i=0}^{n}|l_i(x)|}_{\Lambda_n} \cdot \underbrace{\max_{x\in I}|f(x_i)-\tilde{f}(x_i)|}_{\|f-\tilde{f}\|_\infty}$$

$f = (f(x_0), \dots, f(x_n))^T \qquad \tilde{f} = (\tilde{f}(x_0), \dots, \tilde{f}(x_n))^T$

$$\frac{\| p_n - \tilde{p}_n \|_\infty}{\| f - \tilde{f} \|_\infty} \leq \Lambda_n$$

Da questa formula ottengo una stima dal basso di Λ_n

Conclusione: la costante di Lebesgue è un indicatore d'errore, per il pro di interpolazione polinomiale di grado totale n (nel senso che costruiamo un unico polinomio relativo ai nodi)

La costante di Lebesgue è anche il numero di condizionamento del problema d'interpolazione.

Quindi, quanto più piccola sarà tanto migliore sarà l'interpolazione

Esercizio

Sia data $f(x) = \dfrac{20}{1+\log(x^2)} - 5\sin(e^x)$

nell' intervallo $[1,2]$.

Determinare l'unico polinomio di grado 2, $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

che soddisfa le condizioni

$$\left.\begin{array}{l} p_2(1) = f(1) \\ p_2(2) = f(2) \\ \displaystyle\int_1^2 p_2(x) = \int_1^2 f(x)\,dx \end{array}\right\}$$

condizioni d'interpolazione di tipo generalizzato

Soluzione

Presi i nodi $\{1, \frac{3}{2}, 2\}$

$$p_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x$$

Imponendo le condizioni d'interpolazione

$$a_1 + a_2 + a_3 = 20 - 5\sin(e)$$

$$a_1 + 2a_2 + 4a_3 = \frac{20}{1+\log(4)} - 5\sin(e^2)$$

$$a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \frac{7}{3}a_3 = I$$

e l'ultima condizione

$$\int_1^2 (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)\,dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{}$$

$$a_1 \underbrace{\left[x\right]_1^2}_{1} + a_2 \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2}_{\frac{3}{2}} + a_3 \underbrace{\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2}_{7/3} = I$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3/2 & 7/3 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\bar{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 20 - 5\sin(e) \\ \frac{20}{1+\log(4)} - 5\sin(e^2) \\ I \end{bmatrix}}_{\bar{q}}$$

$$M \quad \bar{a} \quad = \quad \bar{q}$$

$$\bar{a} = M \backslash \bar{q}$$

Per plottare il polinomio d'interpolazione in $[1,2]$, noti i coefficienti, dovrò prendere un insieme di punti "target" o di valutazione, esempio $z = (z_1, \dots, z_{1000})^T$

z = linspace(1, 2, 1000)

$$p(z_k) = a_1 + a_2 z_k + a_3 z_k^2 \qquad k = 1, \dots, 1000$$

In matlab si opera come segue

```
Z = [ones(1000,1), z, z.^2]
```

Z è matrice 1000×3

Pertanto $Z \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\bar{a}}$

$$\bar{p} = Z * \bar{a}$$

p è 1000×1

è il polinomio valutato in tutti i punti $z = (z_1, \dots, z_{1000})$

Per calcolare numericamente

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

si può usare la funzione

```
I = quadl(f, 1, 2)
```

```
f = @(x) 20./(1 + log(x.^2)) - 5*sin(exp(x))
```

Dato p per fare il plot

```
plot(z, p, 'r', z, f(z), 'b-.')
```