Geo 1 -mod A - Lez 27 - 19/12/2023

Note Title

§ Formule di Laplace

Sia $A \in M_n(K)$ $\qquad |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

a) Sviluppo di Laplace rispetto alla 1ª riga

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{12} $\qquad$ A_{11}

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \dots$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

A_{ij} := sottomatrice di A ottenuta cancellando la riga i e la colonna j

b) Sviluppo di Laplace rispetto alla riga i-esima

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

a) è caso particolare di b) con $i=1$

c) Sviluppo di Laplace rispetto alla colonna j-esima

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

c) si ottiene da b) grazie a $\det A = \det A^t$

Tabella dei segni
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \pm \\ - & + & - & & & \\ + & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \pm & \dots & & & & + \end{pmatrix}$$

Esempio Calcolare il $\det \begin{pmatrix} 1^{+} & 0^{-} & -1^{+} & 2^{-} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$

sviluppo 1ª colonna

Sviluppo 1ª riga $|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cancel{- 0 \,|\ |} + (-1)\begin{vmatrix} 0^{+} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0^{+} & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0^{+} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0^{+} & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Laplace 2ª riga

$$= 1 \cdot \left(\cancel{-0\,|\ |} + \cancel{0\,|\ |} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) - 1 \left(\cancel{0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cancel{+ 0\,|\ |} \right)$$

$$-2 \cdot (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (-3) - 1(1) - 2(-3) = 9 - 1 + 6 = 14$$

Esercizio controllare il risultato
- sviluppo di Laplace risp alla 2ª riga
- " " " " 2ª colonna
- operaz. elementari

Sia $M = (x_{ij})$. Dimostriamo che la formula sotto calcola il $\det M$ ossia è multilineare, alternante, e vale 1 se $M = \mathbb{1}_n$.
Procediamo per induzione. Il caso $n=2$ è chiaro (anche $n=1$). Suppongo vero per $n-1$.

Pongo $C := K$

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_{1,j} |M_{1,j}| \qquad \text{(Regola di Laplace)}, \tag{4.2.3}$$

e verifichiamo che questa formula definisce una funzione n-lineare e alternante di C^n che vale 1 quando viene calcolata nei vettori della base canonica, nel loro ordine naturale. Si ha

a)

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,i}+y_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = x_{1,1} \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{i+1}(x_{1,i} + y_{1,i}) \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} x_{1,n} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari delle colonne, si ha

$$\begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & x_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & y_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & y_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & y_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

da cui si deduce che

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,i}+y_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Con questo ho verificato che rispetta la somma in ciascuna compon[ente]

Analogamente, si ha che

b)

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & \alpha x_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & \alpha x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = x_{1,1} \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & \alpha x_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & \alpha x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+(-1)^{i+1}\alpha x_{1,i} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{n+1} x_{1,n} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & \alpha x_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & \alpha x_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ - & & - \\ - & & . \end{vmatrix}$$

Con questo ho verificato che rispetta il prodotto per lo scalare in ciascuna componente

c) Ora dimostro che è alternante:

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & y_1 & \dots & y_1 & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n,1} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = x_{1,1} \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & y_2 & \dots & y_2 & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n,2} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$(-1)^{i+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$(-1)^{j+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$(-1)^{n+1} x_{1,n} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & y_2 & \dots & y_2 & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n,1} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari alternanti delle colonne, si ha che tutti gli addendi sono certamente nulli, a eccezione di

$$(-1)^{i+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} \text{ e } (-1)^{j+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

D'altra parte le due funzioni qui scritte hanno gli stessi argomenti, a eccezione dell'ordine, perché la $(j-1)$-esima colonna della prima coincide con la $(i-1)$-esima della seconda e le altre colonne sono spostate di conseguenza. Quindi, sempre per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j-i-1} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

e quindi, i due addendi rimanenti sono opposti. Abbiamo così verificato che l'applicazione definita in (4.2.3) è multilineare alternante. Infine è immediato dedurre dall'ipotesi induttiva che

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

e ciò conclude la verifica. □

- Per dimostrare la formula di Laplace per la 1ª colonna uso $\det A = \det A^t$

- Per dim la formula dello svil. di Laplace rispetto alla riga i-esima uso che $\det A = -\det B$ ↑ ottenuto scambiando riga 1 e riga i

- Analogo per formula di sv. di Lapl risp. colonna j-esima.

§ Sviluppi con cofattori alieni

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ e considero $1 \leq k \leq n$ fissato e considero un $1 \leq i \leq n$

$$\circledast \quad \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij})$$

A_{ij} sottomatrice di A ottenuta cancellando riga i e colonna j

- se $k = i$ è lo sviluppo di Laplace rispetto alla riga i-esima e dà il $\det A$.
- se $k \neq i$ è lo sviluppo di Laplace del $\det B$ ove B è ottenuta da A scrivendo la riga k-esima al posto della riga i-esima. Dunque $\circledast$ è 0.

Riassumendo $$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij}) = \delta_{ki} (\det A)$$

§ Matrice dei complementi algebrici

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $A^c = (a^c_{ij}) \in M_n(K)$ con $a^c_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

Esempi: • $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^c = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$a^c_{11} = (-1)^2 \cdot \det A_{11}$ $\quad a^c_{12} = (-1)^3 \cdot \det A_{21}$ $\quad a^c_{21} = (-1) \det A_{12}$

$a^c_{22} = 1 \cdot \det A_{22} = 1$

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^c = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$a^c_{21} = (-1) \cdot |A_{12}| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$ .... esercizio

Verificare che $A A^c = \det A \cdot \mathbb{1}_3$

Lemma Sia $A \in M_n(K)$. Allora $AA^c = A^cA = (\det A)\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \det A & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$,

In particolare $AA^c = 0 \in M_n(K)$ se $\det A = 0$

Dim $AA^c = (c_{ij})$

$c_{ij} =$ (riga i-esima di A)$\cdot$(colonna j-esima di A^c)

$$= (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}) \begin{pmatrix} a^c_{1j} \\ a^c_{2j} \\ \vdots \\ a^c_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, a^c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{il} \det(A_{jl}) = \delta_{ij} \det A$$

↑ cofattori alieni

∎

Conseguenza se A è invertibile, ossia $\det A \neq 0$ allora $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^c$

Infatti $AA^{-1} = \mathbb{1}_n$

$AA^c = \det A \cdot \mathbb{1}_n \iff A \left(\frac{A^c}{\det A} \right) = \mathbb{1}_n$

Di solito è meglio non usare questo A^c per calcolare A^{-1}!

Regola di Cramer

Sia $A \in GL_n(K)$. Allora $Ax = b$ ammette una unica soluzione $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$ con B_i la matrice che ottengo da A sostituendo la colonna i-esima con b

Dim

Se $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$ allora $\cancel{A^{-1}A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{\underbrace{\det A}_{\neq 0}} \cdot A^c b$

$$x_i = \frac{1}{\det A} (\text{riga i-esima di } A^c) \cdot b = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+k} (\det A_{ki})}_{= a^c_{ik}} \cdot b_k$$

$$= \frac{\det B_i}{\det A}$$

∎

Esempio: Trovare le soluzioni del sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 5 \neq 0$

$x = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{3}{5}$ $\quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5}$ $\quad \begin{pmatrix} 3/5 \\ -7/5 \end{pmatrix}$ è l'unica soluz. del sistema!

§ Minori di una matrice

Def Sia $A \in M_{n,m}(K)$. Un minore di ordine r di A è il <u>determinante</u> di una sottomatrice quadrata di A di ordine r ossia di una sottomatrice ottenuta cancellando $n-r$ righe e $m-r$ colonne.

Esempio $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A \in M_{3,5}(K)$

- Ci sono 15 sottomatrici di ordine 1 ovvero 15 minori $< \begin{smallmatrix} 0 \\ \neq 0 \end{smallmatrix}$

- Minori di ordine 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ cancellando 1ª riga 1ª col. e 4ª e 5ª colonna

  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ cancello 2ª riga 3ª, 5ª, 2ª colonna

- minori di ordine 3 ad es. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ottenuto togliendo 2ª e 4ª colonna

- minori di ordine ~~4~~ non ha senso

Se $A \in M_{m,n}(K)$ posso avere al più minori di ordine $r = \min(m,n)$

Prop a) $\operatorname{rg} A \geq r \iff$ esiste un minore di A di ordine $\geq r$ non nullo ($A \in M_{m,n}(K)$)

b) $\operatorname{rg} A = r \iff$ esiste un minore di A di ordine r non nullo e tutti i minori di ordine $r+1$ (equiv. di ordine maggiore di r) sono nulli

c) $\operatorname{rg} A < r \iff$ tutti i minori di A di ordine $\geq r$ sono nulli

Esempio $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & -2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ minore di A di ordine 2 e non nullo

Devono essere nulli tutti i minori di ordine 3

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Dimostrazione a) $\operatorname{rg} A \geq r \overset{*}{\iff}$ esiste minore non nullo di ordine $\geq r$

Ricordo $\operatorname{rg} A \geq r \iff$ esistono $s \geq r$ colonne l. indip. di A

* $\Rightarrow$) Sia A' sottomatrice di A che consiste di queste s colonne
$A \in M_{m,n}(K)$; $A' \in M_{m,s}(K)$; $\operatorname{rg} A' = s$

Dunque esistono s righe di A' l. indip.
Sia A'' sottomatrice di A' (e di A) ottenuta prendendo solo queste s righe. $A'' \in M_s(K)$ $\operatorname{rg} A'' = s$
$\Rightarrow \det A'' \neq 0$. Questo è minore non nullo di ordine $s \geq r$.

* $\Leftarrow$) Sia A'' sottomatrice quadrata di A di ordine $s \geq r$ t.c. $|A''| \neq 0$
Sia A' la " di A ottenuta considerando solo le colonne che contengono A''. Allora $\operatorname{rg} A' = s$. Dunque le s colonne di A che formano A' sono l. ind. Quindi $\operatorname{rg} A \geq s \geq r$ ☒

Principio dei minori orlati.

PMO dice che: $\operatorname{rg} A = r$ se e solo se esiste un minore di ordine r non nullo, sia $\det A' \neq 0$ con A' sottom. quadrata di A di ordine r, e sono nulli tutti i minori di ordine $r+1$ che si ottengono da sottomatrici di A che contengono A'

Applicaz. Calcolo di eq. cartesiane di sottospazi di K^n

$W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle \leq K^n \qquad \dim W = r < n$

$$\operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ \vdots & w_1 & w_2 & \cdots w_r \\ x_n & & & \end{pmatrix}}_{A \;=\; \text{dipende dai } w_i} = r$$

Individuare un minore non nullo di ordine r nella matrice $(w_1, \dots, w_r)$ e orlare la corrispondente sottomatrice di A imponendo $\det = 0$.

Esempio $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4 \qquad \dim W = 2 = r$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

det minore non nullo di ordine 2

Individuo sottomatrice 2×2 di det. $\neq 0$

2 modi per orlarlo.

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x_3 = 0}$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 1\cdot(x_2 + x_4) - (-x_1 - x_2) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x_1 + 2x_2 + x_4 = 0}$$

eq. cart. W: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Controllo! $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ sono soluz. del sistema. ✓

Altra possibilità
$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$$x_2 + x_4 + x_1 + x_2 = 0 \;\rightsquigarrow\; \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightsquigarrow\; x_3\cancel{(-2)} = 0 \quad x_3 = 0 \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Attenzione: non prendere mai un minore di ordine 2 nullo ossia sottomatrice 2×2 con det 0.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non va bene

Senza il PMO avrei dovuto imporre 4 det. $= 0$

$$\begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases}$$
superflue ← non provengono orlando il minore

PMO dice che: $\text{rg}\,A = r$ se e solo se esiste un minore di ordine r, sia $\det A' \neq 0$ con A' sottom.$^{\text{quadrata}}$ di A di ordine r, e sono nulli tutti i minori di ordine $r+1$ che si ottengono da sottomatrici di A che contengono A'

Dim $\Rightarrow)$ $\text{rg}\,A = r$ tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli in particolare quelli che provengono da sottomatrici contenenti A'.

$\Leftarrow)$ Osservo che le op. elementari non variano la nullità del determin.

Posso assumere che A' sia ottenuta cancellando le ultime $n-r$ righe e le ultime $n-r$ colonne

$$A = \begin{array}{c} \\ r \\ n-r \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} r & n-r \\ \left(\begin{array}{c|c} \boxed{A'} & B \\ \hline C & E \end{array}\right) \\ r & n-r \end{array} \begin{array}{c} \\ r \\ n-r \\ \\ \end{array}$$

$\text{rg}\,A' = r \Rightarrow \det A' \neq 0$

Con operazioni elementari $\rightsquigarrow$ $C = 0$ perché $\text{rg}\begin{pmatrix} A' \\ \hline C \end{pmatrix} = r$

$B = 0$ $\quad \text{rg}(A' \,|\, B) = r$

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$$

se $E = 0$ $\quad \text{rg}\,A = r = \text{rg}\,A'$

Se $E \neq 0$

Se $x = a$ con $i > r$ $j > r$ (coeff. in E)

Se orlo A' con la riga i e la colonna j

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A' & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0\,0 \cdots & x \end{array}\right) = \det A' \cdot x = \begin{cases} \text{se } x \neq 0 \text{ è non nullo} \Rightarrow \text{rg}\,A > r \\ \text{se } x = 0 \text{ è nullo.} \end{cases}$$

$\text{rg}\,A = r \iff E = 0 \iff$ tutti i minori ottenuti orlando A' (con righe e colonne che coinvolgono E) sono nulli. $\square$