Geo 1 -mod A - Lez 26 - 18/12/2023

Note Title

Determinanti (continua)

$\varphi: V \longrightarrow V \qquad \mathcal{V} = \{v_1 \dots v_n\}$ base $\qquad 0 \neq F \in \Lambda^n(V) = \langle F \rangle$

$A = (a_{ji}) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) \qquad \varphi(v_1) = \sum_{j=1}^n a_{j1} v_j, \dots, \varphi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j, \dots$

$$F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)) = F\left(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1,1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{j_2,2} v_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n a_{j_n,n} v_{j_n}\right)$$
$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\right) F(v_1, \dots v_n)$$

$$\det \varphi = \frac{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))}{F(v_1, \dots v_n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

sembra dipendere da A ma posso usare qualsiasi $B = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(\varphi)$

$\det(id_V) = \frac{F(v_1, \dots v_n)}{F(v_1, \dots v_n)} = 1$

Lemma φ è invertibile $\iff \det \varphi \neq 0$

Dim Sia $0 \neq F \in \Lambda^n(V)$. φ invertibile $\Rightarrow \varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)$ è base di V se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base $\Rightarrow F(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) \neq 0$; φ non invertibile $\Rightarrow \varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)$ l. dip. $\Rightarrow F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)) = 0$

Teorema di Binet

$V \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} V$

$\det(\psi \circ \varphi) = (\det \psi)(\det \varphi)$

Dim $\det(\psi \circ \varphi) = \dfrac{F(\underbrace{\psi \circ \varphi(v_1)}_{\psi(\varphi(v_1))}, \dots, \underbrace{\psi \circ \varphi(v_n)}_{\psi(\varphi(v_n))})}{F(v_1, \dots, v_n)} \qquad \mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

Se φ non è invertibile $\det \varphi = 0$ e φ non è iniettiva. Allora $\psi \circ \varphi$ non è iniettiva dunque $\det \varphi = 0$ e $\det \psi \circ \varphi = 0$. Formula ok

Se φ è invertibile posso scrivere la frazione sopra come:

$$\frac{F(\psi(\varphi(v_1)), \dots \psi(\varphi(v_n)))}{F(v_1, \dots v_n)} \cdot \frac{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))}{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))} = \det \psi \cdot \det \varphi$$

perché $\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)$ è base ☒

- Sia ora $V = K^n \qquad \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n} \longrightarrow K$ elemento di $\Lambda^n(K^n)$

Defn $A \in M_n(K) \quad \boxed{\det A := \det f_A} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \qquad f_A: K^n \to K^n,\ x \mapsto Ax$

$\det 1_n = \det id_{K^n} = 1$

stesso simbolo $\to \det: M_n(K) \longrightarrow K$ può essere interpretato come una appl. n-multi. lineare alternante sulle n colonne della matrice t.c. $\det(1_n) = 1$.

Basta verificare che è un'applicaz. $M_2(K) \to K$ multilineare alternante sulle colonne e t.c. $\det \mathbb{1}_2 = \det(e_1,e_2) = 1$

$n=2$ $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

ottengo $ad - cb$.

$n=3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\uparrow a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$

1 2 3 diag

3 1 2 ⇝ 1 3 2 $\to$ 1 2 3

2 3 1 ⇝ 2 1 3 $\to$ 1 2 3

$$\det A = \det\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1} e_i,\ \sum_{j=1}^{3} a_{j2} e_j,\ \sum_{k=1}^{3} a_{k3} e_k\right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3} \det\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\right)$$

Sarrus

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

1 2 3 $\qquad$ 3 1 2 $\qquad$ ⇝ 2 3 1 $\qquad$ 3 2 1 $\qquad$ 2 1 3 $\qquad$ 1 3 2

diagonali − antidiagonali

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Si può verificare che è 3-lineare alternante e vale 1 sul. in $\mathbb{1}_3$

Lemma $\quad \det A = \det A^t$

ricordo: se $A = (a_{ij})$, $A^t = (a^t_{ij})$ con $a^t_{ij} = a_{ji}$

Dim $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$

$\sigma(i) = j$

$i = \sigma^{-1}(j)$

$$= \sum_{\tau = \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\,\sigma^{-1}(n)}$$

$\uparrow$ tutti elem. sono invertibili!

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\,\tau(1)} \cdots a_{n\,\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a^t_{\tau(1),1} \cdots a^t_{\tau(n),n} = \det A^t$$

Esempi utili per il calcolo:

- Sia A triangolare superiore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & a_{22} & * & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

  Allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

  $$\det A = \overset{\text{multilineare sulle colonne}}{\det}\left(a_{11}e_1,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2,\ \ldots\ldots,\ a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots\ a_{nn}e_n \right)$$

  $$= \cancel{\det(\underbrace{a_{11}e_1, a_{12}e_1}_{\text{dipendenti}}, \ldots)} + \det(a_{11}e_1, a_{22}e_2, \ldots)$$

  $$= \det(a_{11}e_1,\ a_{22}e_2,\ \cancel{a_{13}e_1} + \cancel{a_{23}e_2} + a_{33}e_3,\ \ldots)$$

  $\ldots$

  $$= \det(a_{11}e_1, a_{22}e_2, \ldots, a_{nn}e_n) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \overset{1}{\cancel{\det I_n}}$$

- Analogamente $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

- $\det \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} d_i$ matrice diagonale

Esercizio: Calcolare $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-6) - 0 - 0 = 6$

scambio due colonne = cambio segno $\quad \| \quad -\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -(-6) = 6$

Esempio $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 30$

Esercizio Generalizzare al caso $\det \begin{pmatrix} 0 & & d_1 \\ & d_2 & \\ d_n & & 0 \end{pmatrix} = ?$

NB Poiché $\det(A) = -\det A'$ ottenuta scambiando 2 colonne
e $\det A = \det A^t$
si ha anche $\det A = -\det A''$ con A'' ottenuta scambiando 2 righe

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$ ho moltiplicato la 1ª colonna per 5.

$\det A = 7 \qquad \det A' = 20 + 15 = 35 = 5 \cdot 7$

{ Operazioni elementari e calcolo del determinante

- $S(i,j)$ ottenute scambiando colonne i e j di 1_n (oppure righe i e j)

$$\det S(i,j) = -1 \left(\det 1_n\right) = -1$$

Sia $A \in M_n(K)$ $\quad S(i,j)\, A = A'$ ho scambiato 2 righe

per il T di Binet $\boxed{\det A' = -\det A}$

$\boxed{\det A'' = -\det A}$ $\quad \left(A\, S(i,j) = A'' \right)$

↑ per l'alternanza del determinante.

- $E(i, \alpha)$: moltiplico per α la colonna / riga i-esima di 1_n

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \alpha & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \det E(i,\alpha) = \det(e_1, \dots, \alpha e_i, e_{i+1}, \dots) = \alpha \det(e_1 \dots e_n) = \alpha$$

$A' = E(i,\alpha)\, A$ $\quad$ moltiplico riga i-esima di A per α

T. Binet $\boxed{\det A' = \alpha \det A}$

$A'' = A\, E(i,\alpha)$ $\quad \det A'' = \alpha \det A'$

è ottenuta da A moltiplicando colonne i-esime per α

- $E(i,j,\alpha)$: sommo alla riga i-esima α-volte la riga j-esima

$$\det E(i,j,\alpha) = 1 \qquad j \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusione $\det A$ non cambia se applico questo tipo di operazione sulle righe (o colonne)

È evidente se considero $E(i,j,\alpha)$ ottenute come somma di α volte la colonne i-esima alla colonne j-esima.

$$F(v_1, \dots, \cancel{\alpha v_i} + v_j, v_i) = F(v_1, \dots v_j, \dots v_i, \dots v_n)$$

Esempio . Ricordo che se A ha una riga o una colonna nulla sicuramente $\det A = 0$

$$F(\underset{\text{vettore}}{0}, v_2, \dots v_n) = \underset{\text{scalare!}}{0} \qquad F(v_1, v_2, \dots v_n) = 0 \text{ per ogni } v_1$$

$\underset{M_n(K)}{A} \rightsquigarrow$ el. $A' = \begin{pmatrix} \ddots & \times \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ se la matrice ha rango max con entrate $\neq 0$ $\quad \det A' = \prod$ termini sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} & \times & \\ 0 & 0 \; 0 \; 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } \operatorname{rg} A < n \rightsquigarrow \det A = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & b & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A \underset{\substack{\text{scambio} \\ \text{I e III riga}}}{=} -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{(-1)\cdot(-1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{II_r - 2I_r}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & b & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{III_r - II_r \\ IV_r - 2II_r}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & b & 7 \\ 0 & 0 & -1-b & -7 \\ 0 & 0 & 1-2b & -15 \end{pmatrix} =$$

per il risultato che vedremo sotto

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1-b & -7 \\ 1-2b & -15 \end{pmatrix} = 1 \cdot (15 + 15b + 7 - 14b) = \boxed{22 + b}$$

Dunque A è invertibile ($\det A \neq 0$) $\iff b \neq -22$

A non è invertibile $\iff b = -22$.

Esempio $b = 0$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{pmatrix} \underset{IV + III}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{pmatrix} = 22$$

§ Determinanti di matrici a blocchi

$$\underset{M_n(K)}{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & C \\ 0 & \boxed{B_2} \end{pmatrix} \end{array} \qquad B_1 \in M_r(K), \quad B_2 \in M_{n-r}(K)$$

$0 \in M_{n-r,r}(K)$

$$\det A = (\det B_1)\cdot(\det B_2)$$

- Analogamente

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 \\ C' & \boxed{B_2} \end{pmatrix} \qquad B_1 \in M_r(K), \quad B_2 \in M_{n-r}(K)$$

- $\det A = (\det B_1)\cdot(\det B_2)$
- Per induzione si dimostra (esercizio!)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & * \\ 0 & \boxed{B_2} & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{B_s} \end{pmatrix} \qquad B_i \in M_{m_i}(K) \qquad A \in M_n(K)$$

$$m_1 + \dots + m_s = n$$

$$\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_s$$

Dimostriamo a)

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r\times r & r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ r+1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} B_1 & * \\ \hline 0 & \underset{(n-r)\times(n-r)}{B_2} \end{array}\right) \end{array}$$

$\boxed{\text{se } i \le r}$ $a_{ji} = 0$ quando $j > r$

vuol dire che se $\sigma(i) > r$ $a_{\sigma(i),i} = 0$

Dunque nel prodotto sopravvivono solo i fattori dove compaiono $a_{\sigma(i),i}$ con $\sigma(i) \le r$ se $i \le r$

ossia
$$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{t.c.} \\ \sigma\{1,\dots,r\} = \{1,\dots,r\}}} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn}\sigma' \, a_{\sigma'(1),1} \cdots a_{\sigma'(r),r}\right)}_{\det B_1} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-r}} \operatorname{sgn}\tau \prod_{i=1}^{n-r} a_{r+\tau(i),\, r}\right)}_{\det B_2.}$$

NB $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma' \cdot \operatorname{sgn}\tau$ se $\sigma' = \sigma_{|\{1,\dots,r\}}$ e $\tau(i) = \sigma(r+\tau i) - r$ per $1 \le i \le n-r$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$= 2 \cdot 3 = 6$

Ritroviamolo con l'algoritmo di Gauss (sulle colonne) ← non è il metodo + breve in questo caso

$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

II col $- 2$ I col

III c $-$ I col

ho raccolto dalla 2ª colonna.

$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$

III col $- 2$ II col

IV col $+$ II col

triang inferiore.

D'ora in poi scriverò anche $|A|$ al posto di $\det A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

§ Determinanti di Vandermonde

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$ OK ; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}$ Gauss $=$ III$_2 - x_0$ II$_2$, II$_2 - x_0$ I$_2$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_0 x_1 & x_2^2 - x_0 x_2 \end{vmatrix}$

$\boxed{n=1}$ $\boxed{n=2}$

$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ x_1(x_1 - x_0) & x_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}_{(x_2 - x_1) \text{ per il caso prec.}}$

$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Dimostriamolo per induzione : $n = 1$, $n = 2$ visti sopra

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_n - x_0 \\ \vdots & & & \\ 0 & x_1^{n-2}(x_1 - x_0) & & \\ 0 & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) & \cdots\ x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$

ultima riga $- x_0 \cdot$ la penultima

penultima riga $- x_0$ la terzultima

alla riga i-esima tolgo x_0 volte la precedente

$= \det(1) \cdot \det \boxed{M}$ = raccolgo $(x_i - x_0)$ dalla colonna i.

det a blocchi

$= 1 \cdot \det M = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & & x_n \\ \vdots & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

$= \prod_{k=1}^{n} (x_k - x_0) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$ ☒