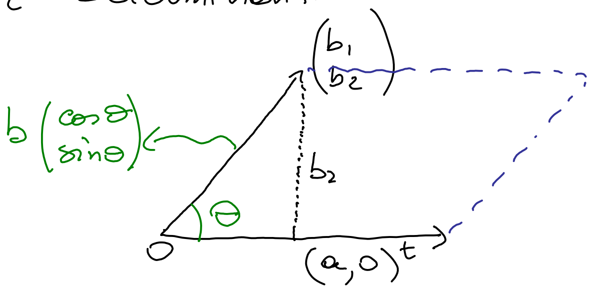
Geo 1 -mod A - Lez 25 - 12/12/2023

Note Title

§ Determinanti

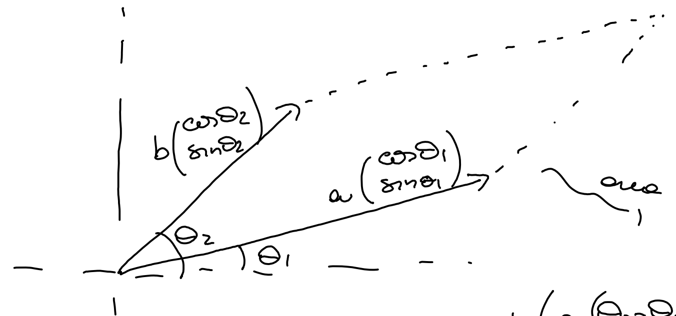


P parallelogramma e considero l'area di P

$$\begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \qquad = \text{base} \cdot \text{altezza} = a \cdot b_2 = ab\sin\theta$$

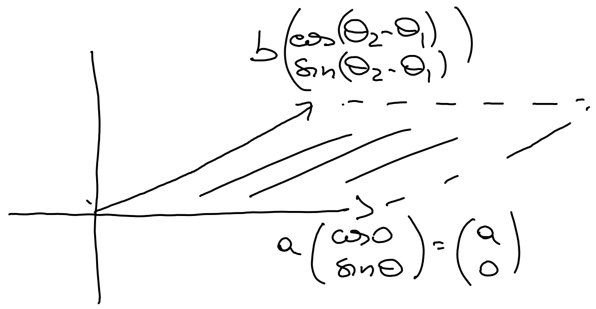
$$\begin{pmatrix} a & b\cos\theta \\ 0 & b\sin\theta \end{pmatrix}$$

1° vettore   2° vettore



area è uguale all'area

ruotando



$a \cdot b \sin(\theta_2 - \theta_1)$

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta_1 & b\cos\theta_2 \\ a\sin\theta_1 & b\sin\theta_2 \end{pmatrix} = \quad = ab\sin\theta_2\cos\theta_1 - ab\sin\theta_1\cos\theta_2 = ab(\sin\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2)$$

Se ho 2 vettori nel piano l'area del parallelogramma individuato da $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ è il valore assoluto del determinante della matrice $(v_1, v_2) \in M_2(\mathbb{R})$

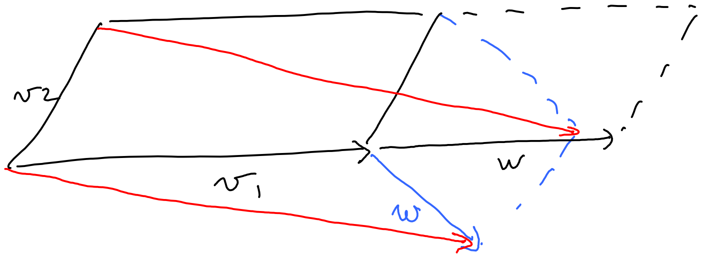
$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \alpha\delta - \beta\gamma$$

Più in generale "det" può essere usato per calcolare volumi di parallelepipedi in $\mathbb{R}^3$ (o anche in $\mathbb{R}^n$)

Lo useremo per:
- verificare se n vettori sono l. indip. in K^n
- per calcolare eq. cartesiane di iperpiani in K^n

• (per la formula di Cramer ....)

Sia $A(v_1, v_2)$ l'area del parall. individuato da v_1, v_2



Si può vedere

A è bilineare

a) $A(v_1 + w, v_2) = A(v_1, v_2) + A(w, v_2)$

b) $A(\alpha v_1, v_2) = \alpha A(v_1, v_2)$

c) $A(v_1, v_1) = 0 \longrightarrow$ è alternante

a') $A(v_1, v_2 + w) = A(v_1, v_2) + A(v_1, w)$

b') $A(v_1, \alpha v_2) = \alpha A(v_1, v_2)$

<u>Def</u> Siano $V_1, \dots, V_m, W$ sp. vettoriali su K (di dim finita)

Una applicaz. $F : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \longrightarrow W$ si dice

a) m- multilineare se è lineare in ciascuna componente

ossia $F(v_1, v_2, \dots, \alpha v_i + \beta v_i', v_{i+1}, \dots v_m) =$

$\alpha F(v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots v_m) + \beta F(v_1 \dots v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots v_m)$

b) Se $V_1 = V_2 \dots = V_m$, si dice alternante se

$F(v_1, \dots v_m) = 0$ non appena 2 tra i v_i sono uguali,

Una F come sopra si dice FORMA se $W = K$

Consideriamo d'ora in poi forme n-multilineari alternanti

con $n = \dim V$

Sia V sp. vett. di dim n

$\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n\text{-volte}} \longrightarrow K$ multilineare e alternante

e indichiamo con $A^n(V)$

questo insieme.

Esempio $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} K$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) \longmapsto \underline{ad - bc}$$ da verificare che $\underline{\text{è multilinea}}$

Esercizio

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right) \longmapsto ac - ac = 0$$

Da verificare

a) $F\left(\overbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} a+a' \\ c+c' \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) = F\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) + F\left(\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$

e le altre b), a'), b')

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} K$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1x_4 - x_2x_3 \leftarrow$$ pol. di grado 2 in $x_1, \dots x_4$

$$\mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ NO LINEARE

Mostreremo che $A^n(V)$ è uno sp. vettoriale di dim 1.

Sia $F: V \times \dots \times V \longrightarrow K$ mult. $\underline{\text{alternante}}$

Dimostro per n-mult. lineari ma vale anche per m-mult. $m \neq n$.

$$F(v_1, v_2, \dots v_i, v_{i+1}, \dots v_j, \dots v_n) = - F(v_1, \dots v_j\, v_{i+1}, \dots v_i \dots v_n)$$

(se scambio di posto due vettori, cambia il segno dell'immagine)

Lo dimostro per $i=1$ e $j=2$ (analogo per le altre coppie di indici)

Calcolo

$$F(v_1, v_2, \dots v_n)$$

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per} \\ \text{alternanza}}}{=} F(v_1+v_2, v_1+v_2, v_3, v_4, \dots v_n) \overset{\text{linearità nella 1ª comp}}{=}$$

$$F(v_1, v_1+v_2, v_3 \dots) + F(v_2, v_1+v_2, v_3 \dots)$$

$$= \cancelto{0}{F(v_1, v_1, v_3, \dots)} + F(v_1, v_2, v_3, \dots) + F(v_2, v_1, v_3, \dots) + \cancelto{0}{F(v_2, v_2, v_3, \dots)}$$

$$= F(v_1, v_2, v_3, \dots) + F(v_2, v_1, v_3, \dots)$$

$$\Rightarrow F(v_1, v_2, v_3, \dots) = - F(v_2, v_1, v_3, \dots)$$

- se $\underbrace{v_1, \dots v_n \text{ sono l. dip.}}_{\Leftrightarrow \text{ uno è c.l. degli altri}} \overset{\text{da dim}}{\Longrightarrow} F(v_1, v_2, \dots v_n) = 0$

Grazie al punto precedente, a meno di scambi (che non cambiano l'essere 0) posso assumere $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$

$$F\left(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i}^{v_n}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F(v_1, \dots, v_{n-1}, v_i)$$

$$= \alpha_1 F(\underbrace{\cancel{v_1, \dots, v_{n-1}, v_1}}_{0}) + \alpha_2 F(\underbrace{\cancel{v_1, v_2, \dots, v_2}}_{0}) + 0 + \dots \qquad 0$$

$\boxtimes$

Siano $v_1, \dots, v_n$ l. indip. (ossia formano una base di V)

$F(w_1, w_2, \dots w_n) = ?$ $\qquad w_i \in V$ qualsiasi

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$$ sono le coord. di w_i nella base $v_1, \dots v_n$

$$F\left(\sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{j_1 1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} \alpha_{j_2 2} v_{j_2}, \dots\dots \sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{j_n n} v_{j_n} \right) =$$

$$\sum_{j_1=1}^{n} \alpha_{j_1 1} F(v_{j_1}, \dots \dots \dots) =$$

$$\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{j_1,1} \alpha_{j_2 2} \dots\dots \alpha_{j_n n} \underbrace{F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots v_{j_n})}$$

è diverso da 0 solo se $v_{j_1}, \dots v_{j_n}$ sono diversi tra loro (e sono in $v_1, \dots v_n$)

Dunque $v_{j_1}, \dots v_{j_n}$ sono ottenuti permutando i $v_1, \dots v_n$

$j_1 = \sigma(1)$ $\quad j_2 = \sigma(2) \dots \quad j_n = \sigma(n)$ per una qualche permutaz. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$\mathfrak{S}_n$ = gruppo delle permutaz. di $\{1, \dots, n\}$

A ogni $\sigma \rightsquigarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{ scambi}}$

$$F(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \qquad F(v_1, v_2, \dots v_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha_{\sigma(1),1} \alpha_{\sigma(2) 2}, \dots \alpha_{\sigma(n),n} \, \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{F(v_1, v_2, \dots v_n)}_{\text{non dip. da } \sigma}$$

$$= \underbrace{\left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(n),n} \right]} F(v_1, \dots v_n)$$

è uno scalare che dipende dalle coordinate di $w_1, \dots w_n$

$d(\alpha_{ij})$
$\uparrow$ coordinate

Da questo deduco che se $F \neq 0 \Rightarrow F(\overbrace{v_1, \dots v_n}^{\text{base}}) \neq 0$

Sia $F \neq 0$

Sia $0^* G: V \times \dots \times V \longrightarrow K$ n-mult. alternante

$$G(w_1, \dots, w_n) = d(d_{ij})\, G(v_1, \dots v_n)$$

Sia $\mu := \dfrac{G(v_1, \dots v_n)}{F(v_1, \dots v_n)}$. Vedo che $G(w_1 \dots w_n) = \mu F(w_1 \dots w_n)$

Infatti. $G(w_1 \dots) = d(d_{ij}) \underbrace{\dfrac{G(v_1 \dots v_n)}{F(v_1 \dots v_n)}}_{\mu} F(v_1 \dots v_n) = \mu\, d(d_{ij}) F(v_1, \dots v_n) = \mu F(w_1 \dots w_n)$

Ora si verifica che $A^n(V)$ formano uno sp. vettoriale

$$F_1 + F_2 : (w_1, \dots, w_n) \longmapsto F_1(w_1 \dots w_n) + F_2(w_1 \dots w_n)$$

$$\alpha F_1 : (w_1 \dots w_n) \longmapsto \alpha F_1(w_1 \dots w_n)$$

Ho appena visto che se $F \neq 0$ in $A^n(V)$ allora

ogni altra $G \in A^n(V)$ è multiplo di F e quindi

$$A^n(V) = \langle F \rangle.$$

NB Una tale F esiste sicuramente:

Pongo $F(v_1, \dots v_n) = 1$ e definisco $F(w_1 \dots w_n) = d(d_{ij}) \cdot 1$

Def. Se $\varphi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo ($\equiv$ lineare)

e sia $n = \dim V$. Sia $F \in A^n(V)$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1 \dots v_n\}$ una
0^*

base di V.

Definiamo $\det \varphi := \dfrac{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))}{F(v_1, \dots v_n)}$

Sia $B \in M_n(K)$ $\det B := \det f_B$ $\quad f_B : K^n \longrightarrow K^n$, $x \longmapsto Bx$.

Dimostriamo che $\det \varphi$ è ben definito ossia non dipende

né dalla scelta di F né dalla scelta di $\mathcal{V}$

- Sia $G \neq 0$ un'altra forma in $A^n(V)$

So che $G = \mu F$ $\exists\ \mu \neq 0$ scalare

$$\frac{G(\varphi(v_1),\dots\varphi(v_n))}{G(v_1\dots v_n)} = \frac{\cancel{\mu} F(\varphi(v_1),\dots\varphi(v_n))}{\cancel{\mu} F(v_1,\dots v_n)}$$ Ok

Osservo:

$$V^n \xrightarrow{\varphi\times\varphi\dots\times\varphi} V^n \xrightarrow{F} K$$

$$\underbrace{(w_1,\dots w_n) \longmapsto (\varphi(w_1)\dots\varphi(w_n)) \longmapsto F(\varphi(w_1),\dots)}_{\text{è ancora } n\text{-multil. alternante perché } \varphi \text{ è lineare e } F\in A^n(V)}$$ (dimostrarlo!)

Sia $F^\varphi = F\circ(\varphi\times\dots\times\varphi) \in A^n(V)$

So che esiste un $\mu\in K$ t.c. $F^\varphi = \mu F$

Dunque $\dfrac{F^\varphi(v_1\dots v_n)}{F(v_1\dots v_n)} = \mu = \det\varphi$ non dipende dunque dalla base $v_1\dots v_n$ ma solo da F e φ

$$\frac{F^\varphi(v_1\dots v_n)}{F(v_1\dots v_n)} = \frac{F(\varphi(v_1),\dots\varphi(v_n))}{F(v_1\dots v_n)}$$

e quindi $\dfrac{F(\varphi(v_1')\dots\varphi(v_n'))}{F(v_1'\dots v_n')} = \mu = \dfrac{F(\varphi(v_1),\dots)}{F(v_1,\dots v_n)}$

Lemma $\det\varphi = 0 \iff \varphi(v_1),\dots\varphi(v_n)$ sono l. dipend

$\iff \varphi$ non è invertibile.

Provare a dim.