Lezione 14 (6 dicembre 2023)

1) $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $M = \{x^0, x^1, \dots, x^n\}$

a_i ottenuti imponendo le C.I.

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{o} \quad y_i \qquad (1)$$

$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ punti d'interpolazione

(1) è equivalente al sistema lineare con matrice di Vandermonde V che è invertibile sse $x_i \neq x_j$.

perché

$$\det V = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \qquad (2)$$

La (2) si dimostra per induzione

$n = 1$, $X = \{x_0, x_1\}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$$

$n > 1$ chiamando con

$$V_{n-1} = \det V(x_0, \dots, x_{n-1})$$

$$V_n = (\underline{x_n} - x_0) \cdots (\underline{x_n} - x_{n-1}) \cdot V_{n-1}$$

2)

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \underbrace{y_i}_{f(x_i)} \qquad (A)$$

l_i sono i polinomi elementari di Lagrange, sono di grado esattamente n e

$$l_i(x) = \prod_{\substack{i \neq j \\ i,j=0}}^{n} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} \qquad (3)$$

Osservazione Indicando come sopra

$$V_n = \det V(x_0, \dots, x_n)$$

si ottiene

$$(4) \qquad l_i(x) = \frac{\det V(x_0, \dots, x_{i-1}, \overset{i}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\det V(x_0, \dots, x_n)}$$

$\Longrightarrow$ $l_i(x_i) = 1$ (come dalla (3))

$l_i(x_j) = 0 \qquad j \neq i$

(B) $p_n(x) = \ell_0(x)\, y_0 + \ell_1(x)\, y_1 + \dots + \ell_n(x)\, y_n$

Se voglio valutare p_n su un insieme $Z = \{z_0, \dots, z_m\}$ $m \gg n$ di punti di valutazione

$$p_n(z_0) = \ell_0(z_0)\, y_0 + \dots + \ell_n(z_0)\, y_n$$
$$p_n(z_1) = \ell_0(z_1)\, y_0 + \dots + \ell_n(z_1)\, y_n$$
$$\vdots$$
$$p_n(z_m) = \ell_0(z_m)\, y_0 + \dots + \ell_n(z_m)\, y_n$$

$$\bar{p} = L \cdot \bar{y}$$

dove $\underset{(m+1)\times 1}{\bar{p}} = \begin{pmatrix} p_n(z_0) \\ \vdots \\ p_n(z_m) \end{pmatrix}$ $\underset{(m+1)\times(n+1)}{L} = \begin{pmatrix} \ell_0(z_0) & \dots & \ell_n(z_0) \\ \ell_0(z_1) & \dots & \ell_n(z_1) \\ \vdots & & \\ \ell_n(z_m) & \dots & \ell_n(z_m) \end{pmatrix}$

$$\underset{(n+1)\times 1}{\bar{y}} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Se $\{x_i, i=0, \ldots, n\}$ sono equispaziati l'interpolante, soprattutto agli estremi diverge. Questo fenomeno è noto come FENOMENO DI RUNGE

Se i nodi sono equispaziati

$$x_i = x_{i-1} + h \qquad h>0 \quad \text{spaziatura}$$

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h, \ldots$$

proviamo che

$$|\omega_n(x)| = \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \le n! \frac{h^{n+1}}{4} \qquad (5)$$

funzione nodale

Dim (x induzione)

- $n=1$, $\{x_0, x_1\}$ $\qquad x_1 - x_0 = h$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| (x - x_0)(x - x_1) \right| = (x_1 - x_0)^2/4$$

perché $(x-x_0)(x-x_1)$ è una parabola con vertice in $\frac{x_0+x_1}{2}$

$$\Longrightarrow (x_1 - x_0)^2/4 = h^2/4$$

- $n>1$, assumendo vera per $n+1$ punti

$\{x_0, \dots, x_n\}$ provvisoriamente per $n+2$

Prendiamo x_{n+1}

$$\left| \prod_{i=0}^{n+1} (x-x_i) \right| = \underbrace{\left| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \right|}_{\leq \frac{h^{n+1} n!}{4}} \left| x - x_{n+1} \right| \leq$$

$$|x - x_{n+1}| \leq (n+1) h$$

$$\leq \frac{n!\, h^{n+1}}{4} \cdot (n+1) h = \frac{(n+1)!\, h^{n+2}}{4}$$

#

Pertanto nel caso di punti equispaziati

$$\max_{x \in I} |R_n(x)| \leq \frac{\cancel{n!}\, h^{n+1}}{(n+1)!\, 4} \cdot \underbrace{\max_{x \in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}$$

intervallo d'interpolazione

$$= \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x \in I} \left| f^{n+1}(x) \right|$$

Esempio

$$f(x) = \cos(x+1) \qquad I = [0,1] \qquad n = 2$$

$$X = \left\{ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1 \right\}$$

$$R := \max_{x \in [0,1]} |R_2(x)| \leq \frac{1}{4 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \right) \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| f'''(x) \right|$$

$f'''(x) = \sin(x+1)$ $\qquad \sin(1) \simeq 0.84$

$\max_{x \in [0,1]} |\sin(x+1)| \simeq 1$ e si ottiene in $x = \frac{\pi}{2} - 1$ perché

$$\sin(x+1) = 1$$

$$x+1 = \underbrace{\arcsin(1)}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0.57$$

$$R \leq \frac{1}{32 \cdot 3}$$

FENOMENO DI RUNGE

Funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in [-5, 5]$$

se interpolata su nodi equispaziati al di fuori di $[-3.63, 3.63]$ l'interpolante oscilla molto non riproducendo l'andamento della funzione

Soluzione: usare nodi d'interpolazione non equispaziati, in particolare quelli di CHEBYSHEV

Def In $[-1,1]$ i punti di Chebyshev sono gli zeri del polinomio ortogonale di Chebyshev di 1ª specie di grado n

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Risolvendo $\cos(n \arccos x) = 0$

$$n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2n}$$

$$\boxed{x_k^{(c)} = -\cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}\right) \qquad k = 1, \dots, n}$$

- I punti di Chebyshev sono distinti e interni a $[-1,1]$ e simmetrici rispetto all'origine
- Per avere punti simili che comprendono anche gli estremi $-1, 1$ dobbiamo ricorrere ai punti di

CHEBYSHEV – LOBATTO

$$x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, \dots, n$$

NB $x_k^{(c)}$ si possono definire in ogni intervallo $[a,b]$ mediante la trasformazione lineare di $[-1,1]$ in $[a,b]$ $\quad b > a$

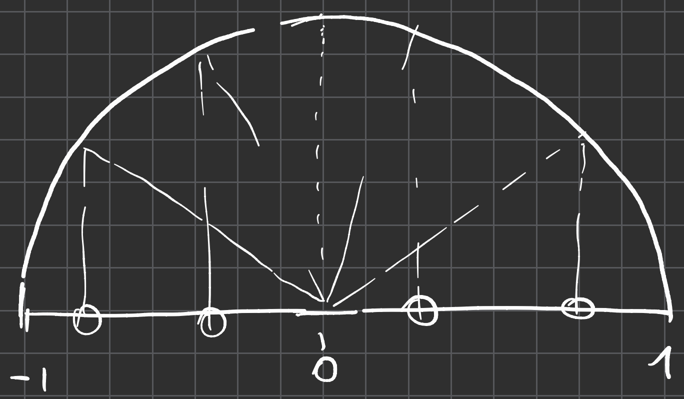
$$Ax + B$$

$$\begin{cases} A(-1) + B = a \\ A(1) + B = b \end{cases}$$

$$A = \frac{b-a}{2} \qquad B = \frac{a+b}{2}$$

$$x^{(c)}_{k,[a,b]} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\, x^{(c)}_{k,[-1,1]}$$

Interpretazione geometrica dei punti di Chebyshev



$$|\arccos(a) - \arccos(b)| = |\theta_a - \theta_b| = \text{cost}$$

Domanda: perché i punti di Chebyshev sono migliori di quelli equispaziati?

- graficamente abbiamo visto che la funzione di Runge viene approssimata meglio (cioè le oscillazioni diminuiscono)

Ma questa giustificazione non ci basta!

Teorema

$f \in \mathcal{C}[a,b]$, sia p_n polinomio d'interpol.
Allora

$$\boxed{\| f - p_n \|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \| f - p_n^* \|_\infty}$$

dove p_n^* è il polinomio di migliore approssimazione uniforme

$$\| f - p_n^* \|_\infty \leq \| f - p_n \|_\infty \quad \forall \, p_n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$$

e Λ_n, detta COSTANTE DI LEBESGUE

$$\Lambda_n := \max_{x \in [a,b]} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} | \ell_i(x) |}_{\lambda_n(x)}$$

FUNZIONE DI LEBESGUE

Osserviamo che Λ_n dipende solo dalla scelta dei punti d'interpol. tramite i polinomi elementari di Lagrange

Si può verificare, anche numericamente che

$$\Lambda_n(X_e) \simeq \frac{2^{n+1}}{n \cdot e \cdot \log_e n}$$

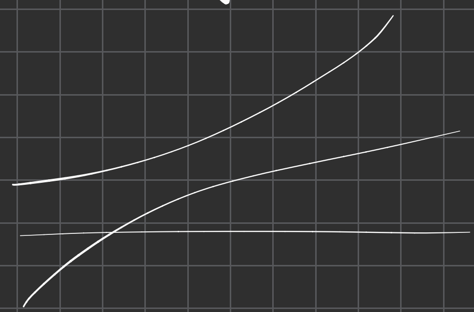
insieme di punti equispaziati

$n =$ grado

$$\Lambda_n(X_c) \simeq \frac{2}{\pi} \log_e(n+1)$$

punti di Chebyshev

In entrambi i casi divergono ma su nodi equispaziati questa diverge esponenzialmente mentre su quelli di Chebyshev solo logaritmicamente



Punti "buoni" sono anche quelli di FEKETE, LEJA.

Fekete

$$\max_{\{x_0, \dots, x_n\} \in I} |\det V(x_0, \dots, x_n)|$$

Indico con $F = \{f_0, \dots, f_n\}$ l'insieme che massimizza il determinante di Vandermonde

Questo implica che i polinomi elementari

$$|\ell_i(x)| = \frac{|\det V(f_0, \dots, f_{i-1}, x, f_{i+1}, \dots, f_n)|}{|\det V(f_0, \dots, f_n)|}$$

$$\Longrightarrow \quad |\ell_i(x)| \leq 1$$

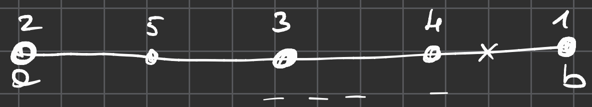
Sui punti di Fekete la funzione di Lebesgue

$$\sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \leq n+1$$

Punti di Leja sono sequenze di punti

$$\prod_{i=0}^{s-1} |x_s - x_i| = \max_{x \in [a,b]} \prod_{j=0}^{s-1} |x - x_j|$$

che hanno una distribuzione simile a quelli di Chebyshev e Fekete



Torniamo al Teorema

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \|f - p_n^*\|_\infty$$

Dim Per ogni $q_n \in \mathbb{P}_n$

$$f - p_n = (f - q_n) - (p_n - q_n) = (*)$$

$$\mathcal{L}_n : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{P}_n \qquad \text{operatore di proiezione}$$

$$\mathcal{L}_n := \sum \ell_i(\cdot) f_i$$

$$\mathcal{L}_n(q) = q \qquad \forall q \in \mathbb{P}_n$$

$$(*) = (f - q_n) - \mathcal{L}_n(f - q_n)$$

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \|f - q_n\| + \|\mathcal{L}_n\| \, \|f - q_n\|$$

$$= \underbrace{\|f - q_n\|} \left(1 + \|\mathcal{L}_n\|_\infty\right)$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_\infty = \Lambda_n$$

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \, \|f - p_n^*\|$$

#

NB $\Lambda_n \geq 1$

$$\max_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \geq \max_{x \in I} \Big| \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)}_{=1} \Big| = 1$$