Ulteriori risultati su dualità e ortogonalità

Note Title

Lemma Sia $W \leq V$ con $\dim V = n$. Allora $\dim W^{\perp} = n - \dim W$

Dim Sia $\mathcal{V} = \{w_1, \dots w_r, v_{r+1}, \dots v_n\}$ base di V con $\{w_1, \dots w_r\}$ base di W. Sia $\mathcal{V}^* = \{w_1^*, \dots w_r^*, v_{r+1}^*, \dots v_n^*\}$ base duale.

Chiaramente, per costruzione, $v_j^*(w_i) = 0 \ \forall i$. Dunque $v_j^* \in W^{\perp} \ \forall j$

Mostriamo che $W^{\perp} = \langle v_{r+1}^*, \dots v_n^* \rangle$. "$\supseteq$" vista sopra.

Sia $v^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i^* + \sum_{j=r+1}^{n} \beta_j v_j^*$ in $W^{\perp}$. Deve essere $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i^* + \sum \beta_j v_j^*\right)(w_e)}_{\alpha_e} = 0 \ \forall e$

ossia $v^* \in \langle v_{r+1}^*, \dots v_n^* \rangle$.

Lemma Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ lineare e sia $\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$ la sua trasposta

Allora a) $\operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp}$ e b) $\operatorname{Im} \varphi^* = (\operatorname{Ker} \varphi)^{\perp}$

Dim

$$\operatorname{Ker} \varphi^* = \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } \varphi^*(w^*) = 0_{V^*} \}$$
$$= \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } w^* \circ \varphi = 0_{V^*} \}$$
$$= \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } (w^* \circ \varphi)(v) = 0_K \ \ \forall v \in V \}$$
$$= \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } w^*(\underset{\operatorname{Im}\varphi}{\underset{\cap}{\varphi(v)}}) = 0 \ \ \forall v \in V \} = (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp}$$

Per l'altra (potremmo usare $(\cdot)^{\perp\perp} = \cdot$ e identificare φ^{**} con φ)

Oppure.

$$\operatorname{Im} \varphi^* \subseteq (\operatorname{Ker} \varphi)^{\perp} \leq V^*$$

$v^* = \varphi^*(w^*) \in \operatorname{Im}(\varphi^*)$, $w^* \in W^*$ $\qquad W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$

& $v \in \operatorname{Ker}\varphi$ $\quad v^*(v) = \varphi^*(w^*)(v) = w^*(\varphi(v)) = w^*(0) = 0 \implies v^* \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$

Per concludere basta vedere che hanno la stessa dimensione.

[Esercizio!] $\qquad \dim V = n \qquad \dim W = m$

$\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\dim V^*} \qquad \overset{\shortparallel}{\dim W^*}$

Usare anche il fatto che a) è noto!

Conseguenza: $\varphi: V \longrightarrow W$ lineare è iniettiva $\iff$ $\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$ è suriet.

φ - - - - - suriettiva $\iff$ φ^*: - - - - è iniettiva

$U \leq V$ $\qquad$ $U \overset{i}{\hookrightarrow} V$, $\quad u \longmapsto u$ $\qquad$ $i^* : V^* \xrightarrow{\text{suriett.}} U^*$

$V \xrightarrow{\pi} V/U$ $\qquad$ $\pi^* : (V/U)^* \xhookrightarrow{\text{iniett.}} V^*$

$v \longmapsto v + U \ni v'$

$v' - v \in U$

$\operatorname{Im} i = U \quad \Rightarrow (\operatorname{Ker} i^*) = (\operatorname{Im} i)^\perp = U^\perp$

1° T. di isomorfismo $\quad V^* / \operatorname{Ker} i^* \cong U^* = \operatorname{Im} i^*$

(1) $\boxed{V^*/U^\perp \cong U^*}$

$(\operatorname{Ker} \pi)^\perp = \operatorname{Im} \pi^* = (V/U)^*$

$\underset{\displaystyle U^\perp}{\overset{\shortparallel}{(\operatorname{Ker}\pi)^\perp}} = (V/U)^* \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U^\perp = (V/U)^*}$ (2)

(1) dice che:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v_i^*"] & K \\ U \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "v_i^*|_U \in U^*"'] & \end{tikzcd}$$

$v_1^*, v_2^* \in V^*$

$v_1^*|_U = v_2^*|_U \iff v_1^* - v_2^* \in U^\perp$

$v^* \in V^*$ è t.c. $v^*|_U = 0 \iff v \in U^\perp$

$$\begin{tikzcd} V/U \arrow[r, "\bar\varphi"] & K \\ V \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar\varphi \in V/U$ sono applicazioni t.c.

se φ_1, φ_2 hanno $\bar\varphi_1 = \bar\varphi_2$

$\underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{\in U^\perp}$ si annulla in U