Geo 1 -mod A - Lez 24 - 11/12/2023

Note Title

V sp. vett su K $\qquad V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$

Di solito lavoriamo con $\dim_K V = n$

Esempio con $\dim V = \infty$ $\qquad V = K[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,\ a_i \in K \right.$ con gli a_i $\left.\underbrace{\text{"quasi tutti"}}_{\text{tutti tranne finiti}} 0 \right\}$

covettori := vettori di V^*

$V^* = \{ \underset{K\text{-lineari}}{f : K[x] \longrightarrow K} \}$.

f è individuata da $\underset{b_0}{\underset{\shortparallel}{f(1)}}, \underset{b_1}{\underset{\shortparallel}{f(x)}}, \underset{b_2}{\underset{\shortparallel}{f(x^2)}}, \dots, \underset{b_m}{\underset{\shortparallel}{f(x^m)}}, \dots$ in K

$$(b_0, b_1, \dots) \in K^{\mathbb{N}} = K[[x]]$$
$$\longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

NB i b_i possono essere $\neq 0$ per ogni i

Ad esempio $\sum_{i=0}^{\infty} x^i \in K[[x]] = V^* \underset{\neq}{\supseteq} K[x]$ e non è isomorfo a $K[x]$

$V \qquad \mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V ; $\dim V = n$

$V^* \qquad \mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots v_n^*\}$ --- duale (di V^*) $\qquad v_i^*(v_k) = \delta_{ik}$

Nel caso $V = \mathbb{R}^n$ (K^n) possiamo interpretare $v_1, \dots v_n$ come colonne di una matrice $H = (v_1, \dots, v_n)$ $\quad \mathrm{rg}\, H = \mathrm{rg}_{col} H = n$

$\Rightarrow H$ è invertibile.

Trovare la base duale di $\{v_1, \dots v_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ equivale a determinare l'inversa di H.

Infatti: osservo ① $\quad v^* \in \underset{M_{1,n}(\mathbb{R})}{\underset{\shortparallel}{(\mathbb{R}^n)^*}}$ $\qquad v^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}$-lineare

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \longmapsto (a_1, a_2, \dots a_n) X$$

$v_1^*(v_1) = 1$

$v_1^*(v_k) = 0$ se $k \neq 1$

$$\underbrace{(a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n})}_{\text{devo determinarla}} (v_1, v_2, \dots v_n) = (1, 0, 0 \dots 0)$$

$v_2^*(v_1)=0$ $\qquad (a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n})(v_1\ v_2\ \dots\ v_n)=(0\ 1\ 0\ \dots\ 0)$

$v_2^*(v_2)=1$

$v_2^*(v_k)=0$ se $k>2$ $\qquad$ e così via

$$\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1, \dots v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

righe corrispondenti $\rightarrow$

Esempio $\quad \mathbb{R}^2 = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}} \rangle \qquad v_1^*: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$v_2^*: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$v_1^* \rightsquigarrow (a, b)$ t.c. $(a, b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1 \qquad (a,b)\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=0$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+3b=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -a=b-1 \\ 2b-2+3b=0 \end{matrix} \qquad 5b=2 \qquad \begin{matrix} a=-b+1=3/5 \\ b=2/5 \end{matrix}$$

$v_1^* = (3/5, 2/5)$

analogamente trovo che $v_2^* = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

avrei potuto ricavarla brevemente ricordando

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Def Siano V, W sp. vett. su K.

Una applicazione $\Phi: V\times W \longrightarrow K$ si dice **bilineare** se:

$\Phi(\alpha v_1+\beta v_2, w) = \alpha\Phi(v_1,w)+\beta\Phi(v_2,w)$

e $\Phi(v, \alpha w_1+\beta w_2) = \alpha\Phi(v,w_1)+\beta\Phi(v,w_2)$

$\forall\, \alpha,\beta\in K,\ v, v_1, v_2 \in V$ e $w, w_1, w_2 \in W$.

(NB) La definizione chiede che $\Phi(\cdot\,, w): V\longrightarrow K$ sia lineare $\forall w$ e $\Phi(v, \cdot): W\longrightarrow K$ sia lineare.

(NB) Φ bilineare $\iff \Phi(\sum \alpha_i v_i, w) = \sum \alpha_i\,\Phi(v_i, w)$ e analog. $\Phi(v, \sum\beta_j w_j) = \sum\beta_j\Phi(v, w_j)$

§ bidualità

Sia $\dim_k V = n$ $\qquad V \xrightarrow{\text{isom}} V^*$ $\qquad$ Ma dipende dalla base!

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ è base di V $\qquad v_i \longmapsto v_i^*$ $\qquad$ non è canonico.

Sia $\underset{\text{biduale}}{V^{**}} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_k(\underbrace{\mathrm{Hom}_k(V, K)}_{V^*}, K)$

$$\underset{\text{valutazione}}{ev} : V \longrightarrow V^{**}$$
$$v \longmapsto ev(v) : \overbrace{\mathrm{Hom}(V, K)}^{V^*} \longrightarrow K$$
$$\underset{v^*}{\overset{\shortparallel}{f}} \longmapsto \underset{v^*(v)}{\overset{\shortparallel}{f(v)}}$$

Da verificare:

a) $ev(v) : V^* \to K$ è lineare ossia è un elemento di $(V^*)^*$ $\quad \forall v \in V$

b) ev è lineare $: V \longrightarrow V^{**}$

c) ev è iniettiva

\+ $\dim V = n = \dim V^* = \dim V^{**}$

ev è isomorfismo!

a) $ev(\underset{\text{fissato}}{v}) : V^* \longrightarrow K$ è lineare

$$ev(v)(v_1^* + v_2^*) := (v_1^* + v_2^*)(v) = v_1^*(v) + v_2^*(v) = ev(v)(v_1^*) + ev(v)(v_2^*)$$
$$ev(v)(\lambda v_1^*) = (\lambda v_1^*)(v) = \lambda(v_1^*(v)) = \lambda(ev(v)(v_1^*))$$
$\lambda \in K$

Esercizio: ridimostrarlo usando c. l. di lungh. 2

b) $ev : V \longrightarrow V^{**}$ è lineare

$ev(v_1 + v_2) : V^* \longrightarrow K$

dunque $ev(v_1+v_2) = ev(v_1) + ev(v_2)$ perché coincidono su $\forall v^* \in V^*$

$$ev(v_1+v_2)(v^*) = \overset{\text{lineare}}{v^*}(v_1+v_2) = v^*(v_1) + v^*(v_2) = ev(v_1)(v^*) + ev(v_2)(v^*)$$

per ogni $v^* \in V^*$ $\implies ev(v_1+v_2) = ev(v_1) + ev(v_2)$

$ev(\lambda v_1) : V^* \longrightarrow K$

$$ev(\lambda v_1)(v^*) = v^*(\lambda v_1) \overset{v^* \text{ lin}}{=} \lambda v^*(v_1) = \lambda\, ev(v_1)(v^*) \qquad \forall v^* \in V^*$$

$\implies ev(\lambda v_1) = \lambda ev(v_1)$ e quindi $ev(\lambda v_1) = \lambda ev(v_1)$ perché coincidono su tutto V^*

c) $\ker ev = \{ v \in V \text{ t.c. } ev(v) = 0_{V^{**}} \text{ ossia } ev(v) : V^* \xrightarrow{0} K \}$

$$\overset{!}{=} \{ v \in V \text{ t.c. } v^*(v) = 0 \quad \forall v^* \in V^* \} = \{0\}$$

$$\underset{0}{\overset{v^*}{\neq}} : V \longrightarrow K \qquad \text{se } v \neq 0_V \text{ potrei completarlo ad una base}$$
$$v \longmapsto 1 \qquad v, v_2, \dots v_n$$
$$v_i \longmapsto 0$$

Osservazione $V \rightsquigarrow V^* \rightsquigarrow V^{**}$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\} \rightsquigarrow \underbrace{\{v_1^*, \dots, v_n^*\}}_{\mathcal{V}^*} \rightsquigarrow \underbrace{\{v_1^{**}, v_2^{**} \dots\}}_{\mathcal{V}^{**}}$ $\qquad v_i^{**} = (v_i^*)^*$

Mostro che $v_i^{**} = ev(v_i) : V^* \longrightarrow K$ K-lineari

$v_i^{**}(v_j^*) = \delta_{ij}$

$ev(v_i)(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$ Dunque $v_i^{**} = ev(v_i)$ perché coincidono su una base di V^*

Dunque $ev : V \longrightarrow V^{**}$ è l'isomorfismo che manda v_i in $(v_i^*)^*$

(Ricordare: è definito indip. dalla scelta di una base!)

Osservazione

Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "ev"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "(\varphi^*)^* = \varphi^{**}"] \\ W \arrow[r, "ev"'] & W^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & ev(v) \arrow[d, mapsto] \\ \varphi(v) \arrow[r, mapsto] & \varphi^{**}(ev(v)) = ev(\varphi(v)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V^* & w^* \circ \varphi \\ W^* \arrow[u, "\varphi^*"] & w^* \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} ev(v) : V^* \arrow[r] & K \\ W^* \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[ur, "\underbrace{ev(v) \circ \varphi^*}_{\varphi^{**}(ev(v))}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} ev(\varphi(v)) : W^* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & K \\ V^* & \end{tikzcd}$$

Devo verificare che $ev(\varphi(v)) : W^* \longrightarrow K$

è uguale a $ev(v) \circ \varphi^* : W^* \longrightarrow K$

controllo sui $w^* \in W^*$

$w^* : W \longrightarrow K$, $\varphi \uparrow$ V

$ev(\varphi(v))(w^*) = w^*(\varphi(v))$

$(ev(v) \circ \varphi^*)(w^*) = ev(v)(\varphi^*(w^*)) = ev(v)(w^* \circ \varphi) =$

$= (w^* \circ \varphi)(v) = w^*(\varphi(v))$

uguali!

☒

Interpretazione della bidualità in termini di appl. bilineari

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \longrightarrow K$$

$$(v\ ,\ v^*) \longmapsto v^*(v) = \underbrace{ev(v)}_{\hookrightarrow\, V \to V^{**}}(v^*) = v^* \circ v^* = \langle v, v^* \rangle$$

(v, v^*) non è la composiz

$\langle\ ,\ \rangle$ non sono quelle di "generatori" di sp. vett.

Questa applicazione è bilineare (verificarlo!)

È pure non degenere: vuol dire (usando l'ultima notazione)

$$\langle v, v^* \rangle = 0 \quad \forall\, v \in V \Rightarrow v^* = 0$$

$$\langle v, v^* \rangle = 0 \quad \forall\, v^* \in V^* \Rightarrow v = 0$$

- Questa $\langle\ ,\ \rangle$ fissata

$$(\ \ )^\perp : \underbrace{\mathbb{P}(V)}_{\text{insieme dei sottosp. di } V} \longrightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

$$W \leq V \longmapsto W^\perp = \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } v^*(w) = 0 \ \forall\, w \in W \}$$

$W^\perp$ ortogonale di W

Esercizio verificare che $W^\perp$ è sottospazio (immediato!)

$$W^\perp = \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } W \leq \ker v^* \}$$

NB Qui definito per sottospazi ma potrei analog. definirlo per sottoinsiemi di V; $S \subseteq V$

$$S^\perp = \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } v^*(w) = 0 \quad \forall\, w \in S \}$$

$$\overset{\text{si dimostra}}{=} \langle S \rangle^\perp$$

$\langle S \rangle$ sottosp. generato da S

Esempio

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{2*})$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow W^\perp = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ t.c. } f(W) = 0 \text{ ossia } f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (a, b)x$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(a, b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \qquad a + 2b = 0 \qquad a = -2b$$

$f \rightsquigarrow (-2, 1) = A$ tutte le f in $W^\perp$ sono del tipo

$$x \longrightarrow (-2d, d)x$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto -2dx_1 + dx_2$$

Analogamente posso considerare

$$\mathbb{P}(V^*) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

$$U \leq V^* \longmapsto U^\perp = \{ v \in V \text{ t.c. } \underset{u(v)}{\langle v, u \rangle} = 0 \ \forall\, u \in U \}$$

appl. lin.

$= \{ v \in V \text{ t.c. } v \in \operatorname{Ker} u \ \forall u \in U \}$

$= \bigcap_{u \in U} \operatorname{Ker} u$ ← è sottospazio perché intersezione di sottospazi!

Proprietà ① dati $0 \leq W \leq Z \leq V$ allora ho

$$V^\perp = 0 \leq Z^\perp \leq W^\perp \leq V^* = 0^\perp$$

② $(W^\perp)^\perp = W$ se stiamo lavorando in dim finita

③ $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Dimostrazione ① Sia $W \leq Z$

sia $v^* \in Z^\perp$ dunque $Z \leq \operatorname{Ker} v^* \Rightarrow W \leq \operatorname{Ker} v^* \Rightarrow v^* \in W^\perp$

Dunque $Z^\perp \leq W^\perp$

② $W \overset{(*)}{\subseteq} (W^\perp)^\perp$ è immediato (per def.)

A questo punto: dato $V \supseteq W$ se $m = \dim W$ e $n = \dim V$

si dimostra (domani) che $\dim W^\perp = n - m$

Dunque $\dim (W^\perp)^\perp = \dim V^* - \dim W^\perp$

$= n - (n - m) = n - n + m = m = \dim W$

Dunque $(*)$ e uguale dimensione $\Rightarrow$ uguaglianza

③ esercizio