Geo 1 -mod A - Lez 23 - 06/12/2023

Note Title

$\mathrm{Hom}_K(V, K) = V^*$ ⟵ $f : V \longrightarrow K$ sp. vettoriale su K; $v_i^* \in V^*$

se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ base di V^*

$$v_1^* : V \longrightarrow K \qquad v_1 \longmapsto 1,\quad v_2 \longmapsto 0,\quad \dots,\quad v_n \longmapsto 0$$

$\mathrm{Ker}\, v_1^* = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$

$\mathrm{Im}\, v_1^* = K$

$$v_i^* : V \longrightarrow K \quad \text{t.c.} \quad v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathcal{V},\{1\}}} M_{1,n}(K)$$

$$f \longmapsto \alpha_{\mathcal{V},\{1\}}(f) = (a_1, a_2, \dots a_n)$$

$$v_i^* \longmapsto e_i^t = (0, 0, \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esimo}}}{1}, 0 \dots 0)$$

e_i^t formano base canonica di $M_{1,n}(K)$

$\boxed{\text{Notazione}}$ se un vettore appartiene a V^* di solito si indica con v^* (non c'è in questo caso un v corrispondente, per il momento)

$0 \in V^*$ è l'applicazione nulla $V \longrightarrow K$, $v \longmapsto 0$

$$V^* \setminus \{0\} \longrightarrow \{\text{iperpiano in } V\} = \{\text{sottospazi di dim } n-1 \text{ in } V\} \qquad \dim V = n$$

v^*

$0 \neq v^* : V \twoheadrightarrow K$, $v^* = \varphi$ ⟵ uso questa lettera

$\varphi \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi$

φ ha immagine di dim ≥ 1 (perché $\varphi \neq 0$) e dunque poiché codom. ha dim 1 la φ è suriettiva.

$$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \underset{= \dim V}{n} - \underset{= 1}{\mathrm{rk}\,\varphi} = n-1$$

$$V^* \setminus \{0\} \xrightarrow{\Phi} \{\text{iperpiani di } V\}$$
$$\varphi \longmapsto \operatorname{Ker}\varphi$$

Qui è nascosto $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo del modulo B.

Voglio verificare che Φ è suriettiva
e che φ e ψ hanno la stessa immagine tramite Φ
$\iff \exists\, \alpha \in K^*$ t.c. $\varphi = \alpha\psi$

- suriettività: $U \leq V$ $\dim U = n-1$

$V = U \oplus \langle v' \rangle$ $\quad U = \langle \underbrace{u_1, \dots, u_{n-1}}^{\text{base di } U} \rangle$

Definisco $\varphi : V \longrightarrow K$
$u_i \longmapsto 0$
$v' \longmapsto 1$ (o in un altro numero $\neq 0$ ottenendo un'altra applicazione)

$\operatorname{Ker}\varphi = U$ per costruzione.

- $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi) \iff \varphi = \alpha\psi \quad \exists\, \alpha \in K^*$

$\Leftarrow)$ Sia $\varphi = \alpha\psi$. $\underbrace{\operatorname{Ker}\varphi}_{\phi(\varphi)} = \operatorname{Ker}(\alpha\psi) = \underbrace{\operatorname{Ker}(\psi)}_{\phi(\psi)}$

Infatti: $\underset{\neq 0}{\alpha}\psi(v) = 0 \iff \psi(v) = 0$

$\Rightarrow)$ Sia $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \leq V$ di dim $n-1$
Scelgo una base $v_1, \dots, v_{n-1}$ di $\operatorname{Ker}\varphi$
e la completo a una base di V; sia $v_1, \dots v_{n-1}, v_n$

$\varphi(v_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n-1 \qquad \psi(v_i) = 0$
$\varphi(v_n) \neq 0 \qquad \psi(v_n) \neq 0$

Pongo $\alpha := \dfrac{\varphi(v_n)}{\psi(v_n)} \neq 0$

e risulta $\varphi(v) = \alpha\,\psi(v) \quad \forall\, v \in V$
basta controllarlo su una base, ad es. su $v_1 \dots v_n$ ✓

$\square$

§ applicazione trasposta

Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare

$$f^*: W^* \longrightarrow V^* \qquad \text{appl. trasposta della } f$$
$$w^* \longmapsto w^* \circ f$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "w^*"'] & V \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "w^*\circ f"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Si dimostra: • $w^* \circ f \in V^*$ ossia è K-lineare perché composiz. di appl. K-lineari

• f^* è K-lineare

$$f^*(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*) \overset{?}{=} \alpha_1 f^*(w_1^*) + \alpha_2 f^*(w_2^*)$$

|| per def.

$$\underbrace{\underbrace{(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*)}_{\in W^*} \circ f}_{\in V^*}$$

questa applicazione $V \longrightarrow K$ associa a $v \mapsto \underbrace{\overbrace{(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*)}^{g}(f(v))}_{(\alpha_1 w_1^*)(f(v)) + (\alpha_2 w_2^*)(f(v))}$

$[(g \circ f)(v) = g(f(v))]$

$$= \alpha_1 w_1^*(f(v)) + \alpha_2 w_2^*(f(v)) = \alpha_1 (w_1^* \circ f)(v) + \alpha_2 (w_2^* \circ f)(v)$$
$$= \alpha_1 f^*(w_1^*)(v) + \alpha_2 f^*(w_2^*)(v)$$
$$= [\alpha_1 f^*(w_1^*) + \alpha_2 f^*(w_2^*)](v)$$

$\boxed{\text{OK}}$

Dunque ho costruito $(\ )^*: \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(W^*, V^*)$
$$f \longmapsto f^*$$

Si verifica che $(f \circ g)^* \overset{?}{=} g^* \circ f^*$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] \arrow[rrd, bend right] & V \arrow[r, "f"] \arrow[rd, "f^*(w^*)" description] & W \arrow[d, "w^*"] \\ & & K \end{tikzcd}$$

$w^* \circ f$

$w^* \circ f \circ g = (f \circ g)^*(w^*) = g^*(f^*(w^*))$

$$\begin{tikzcd} Z^* & V^* \arrow[l, "g^*"'] & W^* \arrow[l, "f^*"'] \arrow[ll, bend left, "g^*\circ f^*"] \end{tikzcd}$$

$$(f\circ g)^*(w^*) \overset{?}{=} \underbrace{(g^*\circ f^*)(w^*)}_{\parallel} $$
$$g^*(f^*(w^*)) = g^*(\overbrace{w^*\circ f}^{\in V^*}) \overset{!}{=} w^*\circ f\circ g = w^*\circ(f\circ g) = (f\circ g)^*(w^*)$$

$(\ )^* : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W^*,V^*)$ è K-lineare.

$$f \longmapsto f^*$$

$$(\alpha f+\beta g)^* \overset{?}{=} \alpha f^* + \beta g^* \qquad \left\langle \begin{array}{l} (f+g)^* = f^*+g^* \\ (\alpha f)^* = \alpha f^* \end{array}\right.$$

$f,g: V\longrightarrow W$
$\alpha,\beta\in K$

<u>Dimostrazione</u> • $(f+g)^*(w^*) = w^*\circ(f+g) : V\longrightarrow K$ $\qquad w^*\in W^* = \mathrm{Hom}(W,K)$

$$w^*\circ(f+g)(v) = w^*((f+g)(v)) = w^*(f(v)+g(v)) =$$
$$= w^*(f(v)) + w^*(g(v)) = (w^*\circ f)(v) + (w^*\circ g)(v)$$
$$= [(w^*\circ f)+(w^*\circ g)](v)$$
$$= [f^*(w^*)+g^*(w^*)](v)$$

Dunque $(f+g)^*(w^*) = f^*(w^*)+g^*(w^*) = (f^*+g^*)(w^*)$.

• $(\alpha f)^*(w^*) \overset{?}{=} \alpha f^*(w^*)$ $\qquad$ Esercizio $\forall\, w^*\in W^*$

Fisso basi $\mathcal{V}$ di V e $\mathcal{W}$ di W $\qquad n=\dim V,\ m=\dim W$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}"] \arrow[d, "(\ )^*"'] & M_{m,n}(K) \arrow[d, "(\ )^t"] \\
\mathrm{Hom}_K(W^*,V^*) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}"'] & M_{n,m}(K)
\end{tikzcd}$$

appl. lineare $\rightarrow (\ )^*$ $\qquad$ $(\ )^t \leftarrow$ appl. lineare

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & A \arrow[d, mapsto] \\
f^* \arrow[r, mapsto] & B = A^t
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f_{ij} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & E_{ij} \arrow[d, mapsto] \\
f_{ij}^* & E_{ji}
\end{tikzcd}$$

<u>Proposizione</u> Il diagramma sopra commuta, ossia se
$A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$ e $B = \alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(f^*)$ allora $B = A^t$

Dimostriamolo! $\quad (\ )^t\circ \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ è lineare e così $\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}\circ (\ )^*$

Basta vedere che coincidono su una base di $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Fissate $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ scegliamo come base le applicazioni $f_{ij} : V \longrightarrow W$

$$f_{ij}(v_j) = w_i \quad \text{e} \quad f_{ij}(v_h) = 0 \quad \text{se } h \neq j$$

$\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

$\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_m^*\}$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$

Studio $f_{ij}^* : W^* \longrightarrow V^*$

$$w_\ell^* \longmapsto \underbrace{w_\ell^* \circ f_{ij}} : V \longrightarrow K$$

manda $v_h \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq j \\ w_\ell^*(w_i) & \text{se } h = j \end{cases}$

$w_\ell^*(w_i) = \delta_{i\ell} \Leftarrow$ in particolare è 0 se $\ell \neq i$

Dunque $f_{ij}^*(w_i^*) = v_j^*$

$f_{ij}^*(w_\ell^*) = 0$ se $\ell \neq i$

Dobbiamo verificare cosa succede con $(f^*)_{ji} : W^* \longrightarrow V^*$ che corrisponde a E_{ji}

$$(f^*)_{ji} : w_\ell^* \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq \ell \\ v_j^* & \text{se } i = \ell \end{cases}$$

Dunque $(f^*)_{ji} = f_{ij}^*$ perché assumono lo stesso valore sui vettori w_ℓ^* ☒

Prossima settimana: $V^{**} = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$ biduale

Oss. se $\dim V = n$ $\quad \dim V^* = n$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad \mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

$\varphi_{\mathcal{V}} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, $\quad v_i \longmapsto v_i^*$ isomorfismo. ma non canonico!

$$V \longrightarrow V^{**}$$
$$v \longmapsto ev_v : V^* \longrightarrow K, \quad v^* \longmapsto v^*(v)$$

· lineare
· biettiva

$\Big\}$ $\boxed{\text{isomorf. canonico}}$

Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

- Scrivere la matrice di f risp ~~alla~~ basi canoniche
- " $\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)$ $\qquad \mathcal{B} = \{ e_2, e_1 - e_3, e_1 \}$
- " $\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f)$ $\qquad \mathcal{B}' = \{ -e_2, e_1 \}$
- " $\alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

coord. di $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

coordinate di $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ risp. alla base $\mathcal{E}$

$A' = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)$

$\parallel$

PA

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}} \arrow[r, "f"', "A"] \arrow[dr, "A'\ f"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \arrow[d, "id\quad P = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id)"] \\
 & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

Facile scrivere $P^{-1} = \alpha_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ alg. Gauss per trovare P

$A'' = \alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{E}}(f)$

$|$

$= AQ$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}} \arrow[r, "f", "A"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \arrow[d, "id\ P"] \\
\mathbb{R}^2_{\mathcal{B}'} \arrow[ur, "\alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{E}}(id) = Q\ id"] \arrow[urr, "f\ A''"'] \arrow[rr, "f"'] & & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$Q: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = P A'' = PAQ.$$