

Geo 1 - mod A - Lez 23 - 06/12/2023

Note Title

$$\text{Hom}_K(V, K) = V^*$$

" "

\uparrow $f: V \rightarrow K$
sp. lineare su K

Σ $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

base duale $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ base di V^*

$$v_i^*: V \rightarrow K$$

v_1	\mapsto	1
v_2	\mapsto	0
\vdots	\mapsto	\vdots
v_n	\mapsto	0

$$\text{Ker } v_i^* = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$$

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } v_i^* = K$$

$$v_i^*: V \rightarrow K \quad \text{t.c.} \quad v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K) \xrightarrow{\alpha_{V, K}} M_{1, n}(K)$$

$$f \longmapsto \alpha_{V, K}(f) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$v_i^* \longmapsto e_i^t = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-esimo}}}{1}, \dots, 0)$$

e_i^t formano base canonica di $M_{1, n}(K)$

Notazione α un vettore rappresenta a V^* di solito si indice con α^* (non c'è in questo caso un v corrispondente, per il momento.)

$0 \in V^*$ è l'applicazione nulla $V \rightarrow K$
 $v \mapsto 0$

$V^* \setminus \{0\} \xrightarrow{\downarrow v^*} \{ \text{iperpiano in } V \}$ dim $V = n$

$\{ \text{sottospazi di dim } n-1 \text{ in } V \}$

$$0 \neq v^*: V \rightarrow K$$

$$\rightarrow \varphi \xrightarrow{\quad \quad \quad} \text{ker } \varphi$$

uso questa lettera

φ ha immagine di dim ≥ 1 (perché $\varphi \neq 0$)

e dunque poiché codom. ha dim ≤ 1 lo φ è suriettivo.

$$\dim \text{ker } \varphi = \underset{\substack{\text{"dim } V \\ 1}}{n} - \underset{1}{\text{rk } \varphi} = n-1$$

$$V^* \ni \varphi \xrightarrow{\Phi} \text{iperpiani di } V \quad \text{Ker } \varphi$$

Qui è nascosto
 $\mathbb{P}(V)$
 lo spazio
 proiettivo
 del modulo B .

Voglio verificare che Φ è suriettivo

e che φ e ψ danno la stessa immagine tramite Φ

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \text{ t.c. } \varphi = \lambda \psi$$

• suiettività: $U \subseteq V$ $\dim U = n-1$
 $V = U \oplus \langle v' \rangle$ $U = \langle u_1, \dots, u_{n-1} \rangle$ (base di U)

Definisco $\varphi: V \rightarrow K$
 $u_i \mapsto 0$
 $v' \mapsto 1$ (0 in un numero $\neq 0$ ottenendo un'altra equazione)
 $\text{Ker } \varphi = U$ per costruzione.

• $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi) \Leftrightarrow \varphi = \lambda \psi \quad \exists \lambda \in K^*$
 \Leftrightarrow Sia $\varphi = \lambda \psi$. $\text{Ker } \varphi = \text{Ker}(\lambda \psi) = \text{Ker}(\psi)$

Inferi: $\frac{\lambda}{\lambda} \psi(v) = 0 \Leftrightarrow \psi(v) = 0$

\Rightarrow) Sia $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \subseteq V$ di dim $n-1$

Sceglia una base v_1, \dots, v_{n-1} di $\text{Ker } \varphi$

e la completa a una base di V ; sia v_1, \dots, v_{n-1}, v_n

$\varphi(v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ $\varphi(v_i) = 0$

$\varphi(v_n) \neq 0$ $\varphi(v_n) \neq 0$

Pongo $\lambda := \frac{\varphi(v_n)}{\psi(v_n)} \neq 0$

e risulta: $\varphi(v) = \lambda \psi(v) \quad \forall v \in V$

basta controllarlo su una base, ad es. su v_1, \dots, v_n ✓

§ applicazione trasposta

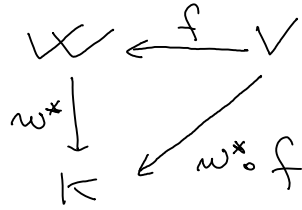
Se $f: V \rightarrow W$

K -lineare

$$f^*: W^* \rightarrow V^*$$

$$\psi \mapsto \psi \circ f$$

app. trasposta della f



Si dimostra: $w^* \circ f \in V^*$

ossia $\in K$ -lineare perché composta di app. K -lineari

f^* $\in K$ -lineare

$$f^*(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*) \stackrel{?}{=} \alpha_1 f^*(w_1^*) + \alpha_2 f^*(w_2^*)$$

// per def.

$$\underbrace{(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*)}_{\in W^*} \circ f \in V^*$$

queste applicazioni $V \rightarrow K$

ossia $\forall v \sim \underbrace{(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*)}_{g}(f(v))$

$$\underbrace{(\alpha_1 w_1^*)(f(v)) + (\alpha_2 w_2^*)(f(v))}$$

$$[(g \circ f)(v) = g(f(v))]$$

$$= \alpha_1 w_1^*(f(v)) + \alpha_2 w_2^*(f(v)) = \alpha_1 (w_1^* \circ f)(v) + \alpha_2 (w_2^* \circ f)(v)$$

$$= \alpha_1 f^*(w_1^*)(v) + \alpha_2 f^*(w_2^*)(v)$$

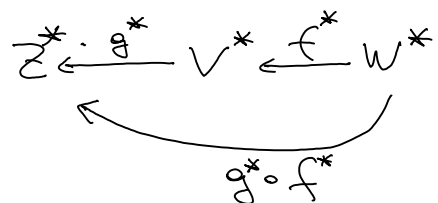
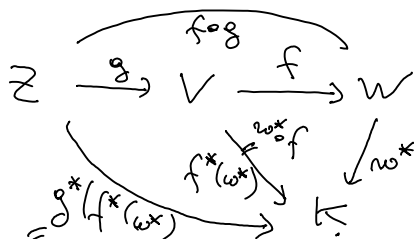
$$= [\alpha_1 f^*(w_1^*) + \alpha_2 f^*(w_2^*)](v)$$

OK

Donque ho costruito $()^*: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*)$

$$f \longmapsto f^*$$

Si verifica che $(f \circ g)^* \stackrel{?}{=} g^* \circ f^*$



$w^* \circ f \circ g$

$\stackrel{!}{=} (f \circ g)^*(w^*)$

$\stackrel{!}{=} g^*(f^*(w^*))$

$$(f \circ g)^*(\omega^*) \stackrel{?}{=} (g^* \circ f^*)(\omega^*)$$

$$\frac{(g^* \circ f^*)(\omega^*)}{g^*(f^*(\omega^*))} = g^*(\omega^* \circ f)$$

$$\stackrel{!}{=} \omega^* \circ f \circ g = \omega^* \circ (f \circ g)$$

$$= (f \circ g)^*(\omega^*)$$

$$(\)^* : \text{Hom}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}(W^*, V^*) \quad \text{è } K\text{-lineare.}$$

$$f \longmapsto f^*$$

$$(\alpha f + \beta g)^* \stackrel{?}{=} \alpha f^* + \beta g^* \quad \begin{cases} (f+g)^* = f^* + g^* \\ (\alpha f)^* = \alpha f^* \end{cases}$$

$f, g: V \rightarrow W$
 $\alpha, \beta \in K$

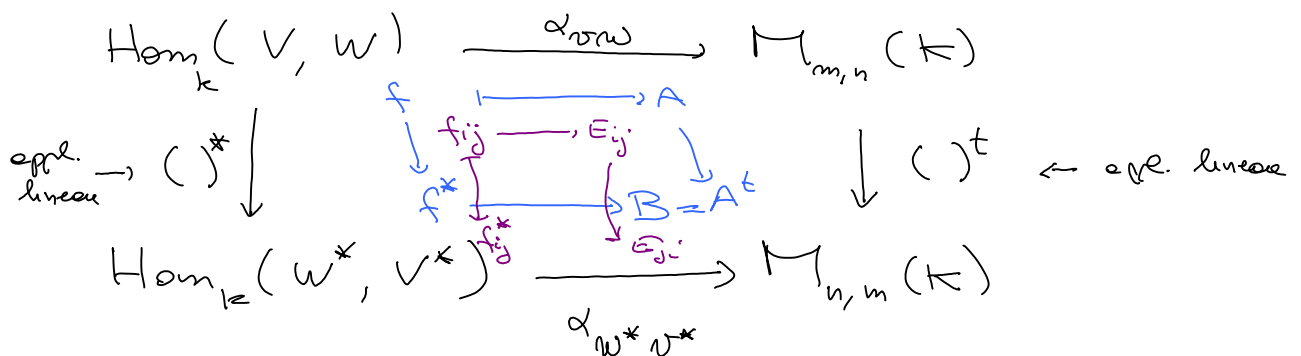
Dimostrazione • $(f+g)^*(\omega^*) = \omega^* \circ (f+g) : V \rightarrow K$ $\omega^* \in W^* \stackrel{!}{=} \text{Hom}(W, K)$

$$\begin{aligned} \omega^* \circ (f+g)(v) &= \omega^*((f+g)(v)) = \omega^*(f(v) + g(v)) \\ &= \omega^*(f(v)) + \omega^*(g(v)) = (\omega^* \circ f)(v) + (\omega^* \circ g)(v) \\ &= [(\omega^* \circ f) + (\omega^* \circ g)](v) \\ &= [f^*(\omega^*) + g^*(\omega^*)](v) \end{aligned}$$

Domque $(f+g)^*(\omega^*) = f^*(\omega^*) + g^*(\omega^*) = (f^* + g^*)(\omega^*)$.

• $(\alpha f)^*(\omega^*) \stackrel{?}{=} \alpha f^*(\omega^*)$ Esempio $\forall \omega^* \in W^*$

Fisso basi \mathcal{V} di V e \mathcal{W} di W $n = \dim V, m = \dim W$



Proposizione Il diagramma sopra commuta, ossia se
 $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$ e $B = \alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(f^*)$ allora $B = A^t$

Dimostrazione! $(\)^t \circ \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \in \text{lineari}$ e così $\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*} \circ (\)^*$

Basce vedute che coincidono su una base di $\text{Hom}_K(V, W)$

Fissati V, W scegliamo come base le applicazioni $f_{ij} : V \rightarrow W$

$$f_{ij}(v_j) = w_i \quad \text{e} \quad f_{ij}(v_k) = 0 \quad \text{se} \quad k \neq j$$

Studio $f_{ij}^* : W^* \rightarrow V^*$

$$w_l^* \mapsto w_l^* \circ f_{ij} : V \rightarrow K$$

Dunque $f_{ij}^*(w_l^*) = v_j^*$
 $f_{ij}^*(w_l^*) = 0 \quad \text{se} \quad l \neq i$

$$V^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$$

$$W^* = \{w_1^*, \dots, w_m^*\}$$

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$W = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } l \neq j \\ v_l^* & \text{se } l = j \end{cases}$$

$$w_l^*(w_i) = \delta_{il} \quad \text{se } l = j$$

" $\delta_{il} \leftarrow$ in particolare $\delta_{il} = 0$ se $l \neq i$

Dobbiamo verificare cosa succede con $(f^*)_{ji} : W^* \rightarrow V^*$ che corrisponde a E_{ji}

$$(f^*)_{ji} : w_l^* \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq i \\ v_j^* & \text{se } l = i \end{cases}$$

Dunque $(f^*)_{ji} = f_{ij}^*$ perché assumono lo stesso valore sui vettori w_l^*

□

Prossimo teorema : $V^{**} = \text{Hom}_K(V^*, K)$ bidualità

Oss. se $\dim V = n$ $\dim V^* = n$

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$V^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$$

$$\varphi : V \xrightarrow{\sim} V^*$$

isomorfismo

ma non canonico!

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & V^{**} \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \\ v_i & \xrightarrow{\quad} & v_i^* \end{array}$$

• lineare
• biettiva } **isomorfismo canonico**

Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

- Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche

" $\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)$ $\mathcal{B} = \{e_2, e_1, e_3\}$

" $\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(f)$ $\mathcal{B}' = \{-e_2, e_1\}$

" $\alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

coord. di $f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

coord. di $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
risp. alle basi \mathcal{E}

$$A' = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)$$

↓
PA

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \\ & \searrow A' & \downarrow \text{id} \\ & & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$P = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\text{id})$

Facile scrivere $P^{-1} = \alpha_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ alg. Gauss per trovare P

$$A'' = \alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{E}}(f)$$

↓
= AQ

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \\ \uparrow \text{id} & \nearrow f & \downarrow P \\ \mathbb{R}^2_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = P A'' = P A Q.$$