Geo 1 -mod A - Lez 22 - 04/12/2023

Note Title

Osservo. $f: V \longrightarrow W$ $\quad \mathcal{V}, \mathcal{W}$ basi fissate su V e W risp.

$f \rightsquigarrow A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$

Se ora $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ sono altre basi $A' = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{W}'}(f)$ $\quad A' \longleftrightarrow A$?

$\dim V = n \quad \dim W = m$

$$\begin{tikzcd}
V^{\mathcal{V}} \arrow[r, "f\ A"] \arrow[d, "Q\ id_V"'] & W^{\mathcal{W}} \\
V_{\mathcal{V}'} \arrow[r, "f\ A'"'] & W_{\mathcal{W}'} \arrow[u, "id_W\ P"']
\end{tikzcd}$$

$f = id_W \circ f \circ id_V$

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(id_W \circ f \circ id_V) = \underbrace{\alpha_{\mathcal{W}'\mathcal{W}}(id_W)}_{P \in GL_m(K)} \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{W}'}(f) \underbrace{\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(id_V)}_{Q \in GL_n(K)}$$

risultato volte scorso

$$\boxed{A = PA'Q}$$ ← lavoreremo più avanti su questo!

<u>Osservazione</u> Le matrici elementari sono opportune matrici di cambio di base (ogni invertibile lo è!)

Sia $E = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(id_V)$ $\qquad \mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\mathcal{V}' = \{v_1' \dots v_n'\}$

<u>Ad es</u> Se E è la matrice elem. $E(i,j)$ scambio di 2 righe..

Fissato $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}' = ?$ Per comodità $E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ & & 1 & \ddots & 0 \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$id: v_1 \longmapsto v_1 = 0v_1' + v_2' + 0 \cdots$ $\qquad v_2' = v_1$

$v_2 \longmapsto v_2 = v_1' + 0v_2' + \cdots 0$ $\qquad v_1' = v_2$

$k > 2 \quad v_k \longmapsto v_k = v_k'$ $\qquad v_k' = v_k$

Dunque $\mathcal{V}'$ è ottenuto da $\mathcal{V}$ scambiando i primi 2 vettori

- Nel caso generale $E(i,j)$, $\mathcal{V}'$ è ottenuto da $\mathcal{V}$

Scambiando di posto i vettori v_i e v_j $\quad$ $\left(\begin{array}{l} v_j' = v_i \quad e \quad v_i' = v_j \\ v_k' = v_k \quad se \ k \neq i, j \end{array} \right)$

Considero ora la matrice elementare ottenuta moltiplicando per $\alpha \neq 0$ la riga i-esima

$i = 1$ $\quad$ $\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} v_1 \longmapsto v_1 = \alpha v_1' \\ v_k \longmapsto \boxed{v_k = v_k'} \quad k > 1 \end{array}$ $\qquad$ $\boxed{v_1' = \frac{1}{\alpha} v_1}$

In generale, v' è ottenuto da v moltiplicando v_i per $\frac{1}{\alpha}$.

Se ora E è ottenuta da $\mathbb{1}_n$ sommando alla riga i-esima α volte la riga j-esima, $E = \alpha_{vv'}(id_V)$ con v'

t.c. $v_k' = v_k$ se $k \neq i, j$ e negli altri casi? Esercizio!

$\begin{array}{l} i=1 \\ j=2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} v_1 \longrightarrow v_1 = v_1' \\ v_2 \longmapsto v_2 = \alpha v_1' + v_2' + 0 \dots \\ v_k \longmapsto v_k = v_k' \qquad k \neq 1, 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} v_1' = v_1 \\ v_2' = v_2 - \alpha v_1' \\ \quad \overset{!}{=} v_2 - \alpha v_1 \end{array}$

Teoremi legati all'algebra!
↑
di isomorfismo

1° Teorema $\quad$ Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ appl. lineare su K

Allora φ induce un isomorfismo (di K-sp. vettoriali)

$$\boxed{\tilde{\varphi} : \frac{V}{\ker\varphi} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}\varphi}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi|"] & W \\ \frac{V}{\ker\varphi} \arrow[r, dashed, "\tilde{\varphi}", "\sim"'] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$v \mapsto [v]$, $\quad v \mapsto \varphi(v)$

sp. vettori $\quad$ $\operatorname{Im}\varphi$ sottospazio

$\ker\varphi \leq V$ (è sottospazio ossia più di un sottogruppo)

$$\tilde{\varphi}([v]) = \varphi(v) \quad \text{è ben definita}$$

perché se $[v] = [v']$ vuol dire che $v - v' \in \ker\varphi$

$$0 = \varphi(v - v') = \varphi(v) - \varphi(v')$$

$\tilde{\varphi}$ è banalmente suriettiva su $\operatorname{Im}\varphi$

$$\underbrace{\tilde{\varphi}([v])}_{\varphi(v)} = 0 \iff \varphi(v) = 0 \iff v \in \operatorname{Ker}\varphi \iff [v] = 0$$

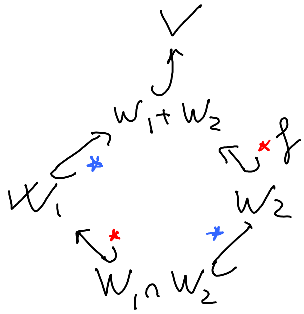
Dunque $\tilde{\varphi}$ è biettiva; inoltre è K-lineare

$$\underbrace{\tilde{\varphi}(\alpha[v] + \beta[v']) = \tilde{\varphi}([\alpha v + \beta v'])}_{\text{def della struttura di sp. v. sul quoziente}} = \varphi(\alpha v + \beta v') \overset{\varphi \text{ lin}}{=} \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(v') = \alpha\tilde{\varphi}([v]) + \beta\tilde{\varphi}([v'])$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}$ è lineare $\Rightarrow$ è isomorf.

2° T. di isomorfismo.

Siano $W_1, W_2 \leq V$



$$\boxed{\frac{W_1 + W_2}{W_1} \cong \frac{W_2}{W_1 \cap W_2}}$$

equivalentemente

$$\boxed{\frac{W_1}{W_1 \cap W_2} \cong \frac{W_1 + W_2}{W_2}}$$

$w \mapsto 0 + w = w + 0$, $w \in W_1 \cap W_2$

$$\begin{tikzcd} W_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "p \circ f"] & W_1 + W_2 \arrow[d, "p"] \\ \frac{W_2}{W_1 \cap W_2} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}", "\cong"'] & \frac{W_1 + W_2}{W_1} \end{tikzcd}$$

$w_2 \mapsto 0 + w_2$, $[w_2]$

Infatti: $\operatorname{Ker}(p \circ f)$ contiene $W_1 \cap W_2$

Sia $w \in W_1 \cap W_2$: si ha che

$$(p \circ f)(w) = p\big(\underset{\underset{W_1}{\in}}{f(w)}\big) = 0$$

$$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \leq \operatorname{Ker}(p \circ f)$$

Dunque è ben definita $\tilde{f} : \dfrac{W_2}{W_1 \cap W_2} \longrightarrow \dfrac{W_1 + W_2}{W_1}$

Osservo che $p \circ f$ è suriettiva. Infatti $[w_1 + w_2]$ in $\dfrac{W_1 + W_2}{W_1}$

$$= [w_2] = \ldots$$

$$= (p \circ f)(w_2)$$

Inoltre $\tilde{f}$ è iniettiva. Infatti se $[w_2]$ in $W_2 / W_1 \cap W_2$ con $w_2 \in W_2$

e $\tilde{f}([w_2]) = 0 \iff [0 + w_2] = 0$ in $\dfrac{W_1 + W_2}{W_1}$

$\iff \quad w_2 \in W_1$

Dunque $\boxed{W_1 \cap W_2 = \mathrm{Ker}(g \circ f)}$ si può concludere brevemente da questo col 1° T. di isom.

3° T. di isomorfismo:

$$W_1 \leq W_2 \leq W_3 \leq V \qquad \text{sottospazi}$$

c'è isomorfismo di K-sp. vett.

$$\frac{\ \frac{W_3}{W_1}\ }{\ \frac{W_2}{W_1}\ } \cong \frac{W_3}{W_2}$$

- $\frac{W_2}{W_1}$ è sottosp. di $\frac{W_3}{W_1}$

$[w_2]$ in $\frac{W_2}{W_1}$

$\downarrow$

$[w_2] = 0$ in $\frac{W_3}{W_1}$ $\quad w_2 \in W_3$

$\iff w_2 \in W_1 \iff [w_2] = 0$ in $\frac{W_2}{W_1}$

$$\begin{tikzcd}
\frac{W_2}{W_1} \arrow[r, hook] \arrow[dr, dotted, "0"'] & \frac{W_3}{W_1} \arrow[r, two heads, "\text{proiezione}"] \arrow[d, "g", "\text{proiez}"'] & \frac{\ \frac{W_3}{W_1}\ }{\ \frac{W_2}{W_1}\ } \arrow[dl, dotted, "?"] \\
& \frac{W_3}{W_2} &
\end{tikzcd}$$

esiste per il 1° T. di isomorf

$g([w_3]) = [w_3]$ in W_3/W_2 $\qquad$ g non è iniettiva in generale.

osservo che $\mathrm{Ker}\, g$ "coincide" con $\frac{W_2}{W_1}$ $\quad \blacksquare$

§ Matrici trasposte.

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ $\qquad$ $A^t = (a^t_{ij}) \in M_{n,m}(K)$

con $a^t_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Si dimostra:

- $(A^t)^t = A$
- $\underbrace{(\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times k}{B})^t}_{m\times k} = \underbrace{\underset{k\times n}{B^t}\ \underset{n\times m}{A^t}}_{k\times m}$
- se $A \in GL_n(K)$ $\qquad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = (\mathbb{1}_n)^t = \mathbb{1}_n$$

Dunque A^t è invertibile e $(A^{-1})^t$ è la sua inversa.

[Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice simmetrica se $A = A^t$]

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ è simmetrica

~

Troviamo le inverse dx e sx (quando esistono)

- Inverse sx: Sia A t.c. esiste B, $BA = \mathbb{1}_n$

  sia $m \times n$ $\quad m \geq n$

  deve avere rango n

$$A \xrightarrow{\text{op. el.}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$$ è matrice a scala ridotta associata.

$$\underbrace{E_r \cdots E_2 E_1}_{\text{elem } m \times m} A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Strategia $$\left(\underset{m\times n}{A} \;\middle|\; \mathbb{1}_m \right) \xrightarrow[\text{righe}]{\text{op. el.}} \left(\begin{matrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{matrix} \;\middle|\; E_r \cdots E_1 \right)$$

$$E_r \cdots E_1 = \begin{pmatrix} B_0 \\ \hline R_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad B_0 \text{ è } n \times m$$

m righe

$m+n$ colonne

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ R_1 \\ \vdots \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} \implies B_0 A = \mathbb{1}_n$$

ossia B_0 è una inversa sx

$R_1 A = (0 \cdots 0)$

$R_2 A = (0 \cdots 0)$

Dunque $B_0 + \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ancora inversa ...

Esempio $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} \right) \xrightarrow[\text{(scrivele!)}]{\text{op. el.}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right)$$

B_0, R_1, R_2

B_0 è inversa sinistra di A

$B_0 A = \mathbb{1}_2 \qquad \left(B_0 + \begin{pmatrix} R_i \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} \right) A = \mathbb{1}_2$

$$\left(B_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & R_i & & \end{pmatrix}\right) A = \mathbb{1}_2$$

Le inverse sinistre sono $\overset{B_0}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} + \left\langle \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha-\beta & -1-2\alpha & \alpha & \beta \\ \gamma-\delta & 1-2\gamma & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Esercizio rifare l'esercizio 3×2 della volta scorsa!

Per l'inversa a dx

Trovare inversa destra di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A \qquad AB = \mathbb{1}_2$

idea: $\underset{B^t A^t}{\overset{\parallel}{(AB)^t}} = \mathbb{1}_2^t = \mathbb{1}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{operaz. sulle colonne} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{B_0} & & C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$AB_0 = \mathbb{1}_2 \qquad AC_i = 0$$

Tutte le inverse sono $B_0 + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} C_1 & \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_2 & \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & C_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix} & C_2 \end{pmatrix} \right\rangle}$

calcoli mi: $\underbrace{B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{soluz particolare}}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio!

$\mathcal{V}$ base di V, $\mathcal{W}$ base di W

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow[\text{isom.}]{d_{\mathcal{V}\mathcal{W}}} M_{m,n}(K)$$

dim $V = n$
dim $W = m$

$$f: V \to W \longmapsto d_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$$

$$f_{ij} \longmapsto E_{ij} = \text{tutti } 0 \text{ tranne } 1 \text{ in posizione } i,j$$

base canonica.

Descriviamo f_{ij} t.c. $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f_{ij}) = E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & e_i & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \end{pmatrix}$

colonna j-esima

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$

$f_{ij}(v_h)$ — $h \neq j$ è 0; $h = j$ è w_i

$$f_{ij}(v_h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq j \\ w_i & \text{se } h = j \end{cases}$$

$\{f_{ij},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ formano una base di $Hom(V,W)$

$f: V \longrightarrow W$ $\qquad f = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}$ $\qquad a_{ij} = ?$ sono proprio i coeff. della matrice associata $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$

<u>Def</u> $Hom_K(V, \overset{=W}{K}) =: V^*$ è detto sp. vettoriale duale

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V; su K fisso la base $\{1\}$

$$Hom_K(V,K) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{V},\{1\}}} M_{1,n}(K)$$
$$f \longmapsto (a_1, a_2, \dots a_n)$$

$\underbrace{v_1^*, \dots, v_n^*}_{\text{base duale}}$ - - - - - - base canonica

$$v_j^*: V \longrightarrow K$$
$$v_i \longmapsto 0 \quad \text{se } i \neq j$$
$$v_j \longmapsto 1$$
