Geo 1 -mod A - Lez 21 - 28/11/2023

Note Title

Esercizio: Determinare l'inversa di $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{1}\,0 & \cancel{0}\,-1 & 1 & 0 & \cancel{0}\,-1 & 1 \end{array}\right)_{III-I} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{2}\,1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)_{\substack{III+II \\ \frac{1}{2} III}}$$

$$\begin{array}{l} II - III \\ I - II_{new} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

The left block is $\mathbb{1}_3$, the right block is A^{-1} ← verificarlo!

$\mathbb{1}_3$: dice che A aveva rg 3 e dunque invertibile

NB Se A è una matrice qualsiasi di ordine 3

$$(A \mid \mathbb{1}_3) \rightsquigarrow \cdots \begin{cases} \to (\mathbb{1}_3 \mid A^{-1}) \\ \to (\text{matrice di rg} < 3 \mid *) \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ non è invertibile

NB $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A$ è invertibile $\Longleftrightarrow ad - bc \neq 0$ e in tal caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Verifichiamolo con l'A. G.

Caso 1) $a = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- 1.1) $c = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \leq 1 \Rightarrow$ non è invertibile
- 1.2) $c \neq 0$

1.2) $a = 0$, $c \neq 0$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[I \leftrightarrow II,\ \frac{1}{c} I]{} \left(\begin{array}{cc|cc} \cancel{c}\,1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$

- 1.2.1 $b = 0$ $\quad \operatorname{rg} A \leq 1$ non è invertibile
- 1.2.2 $b \neq 0$ $\quad \operatorname{rg} A = 2$ e A sarà invertibile

$\frac{1}{b} II$

$I - \frac{d}{c} II_{new}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{cb} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$$

in questo caso $\frac{1}{\cancel{ad}_{0} - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & \cancel{a}_{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$

NB se A non è invertibile $a=c=0$ e dunque $ad-bc=0$
oppure $a=0$ $b=0$ - - - - - - - -

Caso 2) $a \neq 0$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{1}{a}I \\ II - cI_{new}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \cancel{c}_{0} & d - \frac{cb}{a} & \cancel{0}_{-\frac{c}{a}} & 1 \end{array}\right)$$

2.1) $d - \frac{cb}{a} = 0$ no invertibile

2.2) $d - \frac{cb}{a} \neq 0$ .... Esercizio continuare la discussione

Inverse esistono SOLO per matrici QUADRATE di rango max.

Le matrici rettangolari hanno talvolta inverse destra o sinistra.

- Sia f K-lineare

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & V \end{tikzcd}$$

esiste g t.c. $g \circ f = id_V \Leftrightarrow f$ è iniettiva

$\Rightarrow$) facile

$\Leftarrow$) da dimostrare

Sia f iniettiva e sia $\mathcal{V} = \{v_1 \dots v_n\}$ una base di V fissata

So che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è libero

Lo completo ad una base di W $\{\underset{w_1}{f(v_1)}, \dots \underset{w_n}{f(v_n)}, w_{n+1}, \dots w_m\}$

Posso definire g:
$$\begin{aligned} w_1 &\longmapsto v_1 \\ &\vdots \\ w_n &\longmapsto v_n \\ w_{n+1} &\longmapsto 0 \\ &\vdots \\ w_m &\longmapsto 0 \end{aligned} \Bigg\} \text{ vettori a piacere}$$

$g \circ f = id_V$

basta controllarlo sugli el. della base $\{v_1 — v_n\}$

Esercizio: Data $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$f = f_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

determinare tutte le inverse sinistre di f. ($g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$)

$rg A = 2 = rg f \Rightarrow \ker f = 0$

↑ Formula rg + nullità.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f=f_A"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=f_B"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$x \mapsto 1_x$

$$f_B \circ f_A = f_{BA} = id = f_{1_2}$$

$? \; B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$\boxed{BA = 1_2}$$

Ho ridotto il probl a cercare inverse sinistre di A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad BA = 1_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 - x_3 \\ x_4 + x_6 & x_5 - x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_3 = \alpha \\ x_6 = \mu \end{array}$$

rg matrice $= 4 \Rightarrow \underset{\text{soluz partic.}}{(\;\;)} + \langle \underbrace{(\;\;), (\;\;)}_{6-4=2} \rangle$

ad es $\alpha = 0$, $\mu = 0$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \quad K^6 \supseteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

coordinate delle matrici

$$B \in \underset{\substack{\parallel \\ B_0}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

non è un caso

Sono le soluzioni del sist. omogeneo associato

..... c'entra la matrice trasposta che faremo....

In conclusione le inverse sx di A sono tutte e sole del tipo $B = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & \alpha \\ -\beta & 1+\beta & \beta \end{pmatrix}$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dato f

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, two heads, "f"] & W \\ W \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "id_W"'] & & \end{tikzcd}$$

esiste g t.c. $f \circ g = id_W$ $\iff$ f è suriettiva

- $\Rightarrow$) banale
- $\Leftarrow$) Suppongo f suriettiva. Sia $\mathcal{V}$ una base di V formata da vettori $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1} \dots v_n\}$ con

$v_1 \dots v_s$ base del $\mathrm{Ker} f$. Essendo f suriettiva

$w_1 = f(v_{s+1}), \dots, \underset{w_m}{f(v_n)}$ formano una base di W $(m = n-s)$

(guardare dimostraz. della formula delle dimensioni!)

$$g : W \longrightarrow V \qquad \text{e } f \circ g = id_W \text{ per costruzione}$$
$$w_1 \longmapsto v_{s+1}$$
$$w_2 \longmapsto v_{s+2}$$
$$\vdots$$
$$w_m \longmapsto v_n$$

Esercizio Data $\underset{f_A}{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \longmapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $= \alpha_{EE}(f)$

determinare tutte le inverse destre di f

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g = f_B} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \qquad (\text{composizione} = id)$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} \qquad AB = \mathbb{1}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_6 = 1 \end{cases}$$

... (calcoli esercizio)

sist. 4 eq 6 incognite

rango 4

$$B \in \underset{\text{soluzione particolare}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{soluzioni di}}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = (B_1, B_2) \leftarrow \text{colonne}$$

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ossia } B_1, B_2 \in \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Sol}(Ax=0) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Osservazione Siano $A, B \in \underbrace{M_n(K)}$ invertibili

$GL_n(K)$ gruppo generale lineare delle matrici invertibili di ordine n

AB è ancora invertibile

risp. al $\cdot$

e la sua inversa è $B^{-1}A^{-1}$

$\mathbb{1}_n$ el. neutro

A^{-1} è l'inversa

Dim $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbb{1}_nA^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1}_n$

Osservazione $\quad V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$

$\qquad\qquad\quad \mathcal{V} \qquad \mathcal{W} \qquad \mathcal{Z}$

f, g K-lineari
$\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ basi fissate

$A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) \qquad B = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{Z}}(g) \qquad C = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{Z}}(g \circ f)$

Allora $C = BA$

Infatti

$$\begin{tikzcd}
{}_{\mathcal{V}}V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"', "\wr"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & {}_{\mathcal{W}}W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\wr"', "\alpha_{\mathcal{W}}"] & Z_{\mathcal{Z}} \arrow[d, "\wr"', "\alpha_{\mathcal{Z}}"] \\
K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_C"'] & K^m \arrow[r, "f_B"] & K^s
\end{tikzcd}$$

$$\alpha_{\mathcal{Z}} \circ (g \circ f) = (\alpha_{\mathcal{Z}} \circ g) \circ f = (f_B \circ \alpha_{\mathcal{W}}) \circ f = f_B \circ f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}} = f_{BA} \circ \alpha_{\mathcal{V}}$$

$\quad \|$

$f_C \circ \alpha_{\mathcal{V}}$

$\Rightarrow f_{BA} = f_C \quad \Rightarrow \boxed{BA = C}$

Ulteriore applicaz $\quad (\; A \cdot (B + C) = AB + AC \;)$

proprietà associativa del prodotto di matrici

$(AB)D = A(BD)$ $\qquad$ se posso moltiplicarle.

$\qquad \Updownarrow$

$f_{AB} \circ f_D = f_A \circ f_{BD}$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$(f_A \circ f_B) \circ f_D \qquad f_A \circ (f_B \circ f_D)$ $\;\sim\;$ associatività della composizione di applicazioni che è ben nota (insiemistica!)

$\vdots$

(vedere quali altre proprietà del $\cdot$ di matrici avevamo lasciato da dimostrare e verificarle!)

Esercizio $\quad \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

$\qquad\qquad z \longmapsto e^{i\theta} z$

Verificare che è $\mathbb{R}$-lineare e trovare la matrice di f risp. alla base canonica $\{1, i\} = \mathcal{B}$

f è $\mathbb{R}$-lineare $\quad \underbrace{e^{i\theta}(\alpha z+\beta z')}_{f(\alpha z+\beta z')} = \alpha \underbrace{e^{i\theta} z}_{f(z)} + \beta \underbrace{e^{i\theta} z'}_{f(z')} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

banale!

$$\mathbb{C} \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^2$$

$$z = a+ib \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

$e^{i\theta} \cdot (a+ib) = a\cos\theta - b\sin\theta + i(a\sin\theta + b\cos\theta)$

$$e^{i\theta}(a+ib) \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}}_{\alpha_{\mathcal{B}}(f(z))} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

da non dimenticare
Matrice di una rotazione nel piano.

1° el. di base

1° colonna sono le coordinate di $f(1) = e^{i\theta}\cdot 1 = \cos\theta + i\sin\theta$

2° . . . . $f(i) = e^{i\theta}\cdot i = i\cos\theta - \sin\theta$

2° el.

Esercizio Sia $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = U \oplus W$

Determinare le matrici di π_U^W risp. alla base canonica nel dom e codom

e rispetto ad una base a piacere nel dom. e codom.

$$\mathcal{B} = \{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \} \qquad \alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\pi_U^W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a piacere (però scelta bene)

coordinate di $\pi_U^W(v_1)$ nella base $\mathcal{B}$

coord di $\pi_U^W(v_2) = 0$ nella base $\mathcal{B}$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\pi_U^W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

coord $\pi_U^W(e_1)$ risp. a $\mathcal{E}$

coord $\pi_U^W(e_2)$ risp. a $\mathcal{E}$

$\pi_U^W(e_1) = 0$, $e_1 \in W$

$\pi_U^W(e_2)$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \pi_U^W(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oss. $\mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow[\substack{\text{isomorf.}\\ \text{di}\\ \text{sp. vett.}}]{\alpha_{v,w}} M_{m,n}(K)$

ha dim $m \cdot n$ ha dim $m \cdot n$

(isomorf. mandano basi in basi)

Se $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ $w = \{w_1, \dots, w_m\}$

qual è la base di $\mathrm{Hom}(V, W)$ che corrisp. alla base canonica di $M_{m,n}(K)$?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \end{pmatrix}$ qual è la funzione corrispondente $V \longrightarrow W$?