

Geo 1 - mod A - Lez 21 - 28/11/2023

Note Title

Esercizio : Determinare l'inversa di $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III - I \\ III - II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III + II \\ \frac{1}{2} III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} II - III \\ I - II_{new} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\nearrow \text{rg } 3$
 dice che A
 aveva $\text{rg } 3$ e
 dunque invertibile

$A^{-1} \leftarrow$ verificarlo!

(NB) se A è una matrice qualsiasi di ordine 3
 $(A | I_3) \rightsquigarrow (I_3 | A^{-1})$
 $(\text{matrice di } \text{rg} < 3 | *)$
 $\Rightarrow A$ non è invertibile

(NB) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ A è invertibile $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ e in tal caso
 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Verifichiamolo con l'A.G.

Caso 1) $a=0$ $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 1.1) c=0 \Rightarrow \text{rg } A \leq 1 \Rightarrow \text{non è invertibile} \\ 1.2) c \neq 0 \end{cases}$

1.2) $a=0, c \neq 0$ $\begin{pmatrix} 0 & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} c & d & | & 0 & 1 \\ 0 & b & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.1 $b=0$ $\text{rg } A \leq 1$ non è invertibile
 1.2.2 $b \neq 0$ $\text{rg } A = 2$ e A è invertibile

$$\frac{1}{b} II \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{cb} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array} \right)$$

$II - \frac{d}{c} I_{new}$

in questo caso $\frac{1}{\cancel{0} - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & \cancel{a} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

(NB) se A non è invertibile $a=c=0$ e dunque $ad-bc=0$ oppure $a=0$ $b=0$

Caso 2) $a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{a} I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \cancel{0} & d - \frac{cb}{a} & \cancel{0} & 1 \end{array} \right)$$

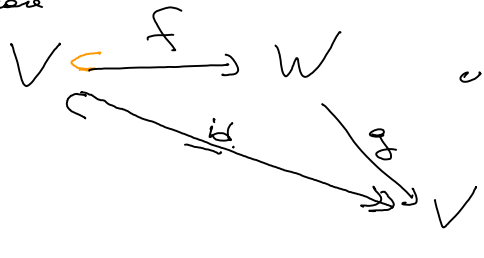
$II - cI_{new}$

- 2.1) $d - \frac{cb}{a} = 0$ No invertibile
- 2.2) $d - \frac{cb}{a} \neq 0$... Esercizio continuare la discussione



Inverse esistono SOLO per matrici QUADRATE di rango max.
Le matrici rettangolari hanno talvolta inverse destra o sinistra.

• Se f K -lineare



esiste g t.c. $g \circ f = id_V \Leftrightarrow f$ è iniettiva
 \Rightarrow) facile
 \Leftarrow) da dimostrare

Sia f iniettiva e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V fissa
 So che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è libero
 Lo completò ad una base di W $\{ \underset{w_1}{f(v_1)}, \dots, \underset{w_n}{f(v_n)}, w_{n+1}, \dots, w_m \}$

Posso definire g :

$$\begin{array}{l} w_1 \mapsto v_1 \\ \vdots \\ w_n \mapsto v_n \\ w_{n+1} \mapsto 0 \\ \vdots \\ w_m \mapsto 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vettori} \\ \text{e} \\ \text{piacere} \end{array}$$

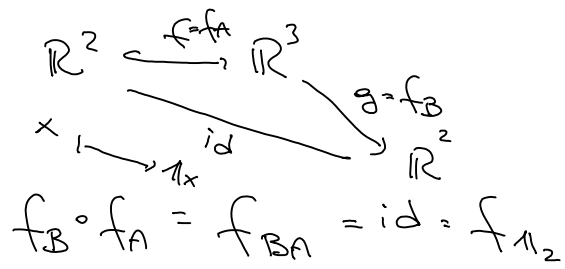
$g \circ f = id_V$
 base controllata sugli el. della base $\{v_1, \dots, v_n\}$

Esercizio: Dato $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$f = f_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

determinare tutte le
 inverse sinistra di f ($g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$)
 $rg A = 2 = rg f \Rightarrow \text{ker } f = 0$
 Formula $rg + nullità$.



$B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$
 $BA = 1_2$

ho ridotto il problema a cercare
 inverse sinistre di A

$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ t.c. $BA = 1_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 - x_3 \\ x_4 + x_6 & x_5 - x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1
 \end{array} \right)$$

$x_3 = \alpha$
 $x_6 = \mu$

rango matrice $\leq 4 \Rightarrow$ $\left(\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right) + \left\langle \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right\rangle$
 $6 - 4 = 2$

$K_{10}^{\mathbb{R}}$

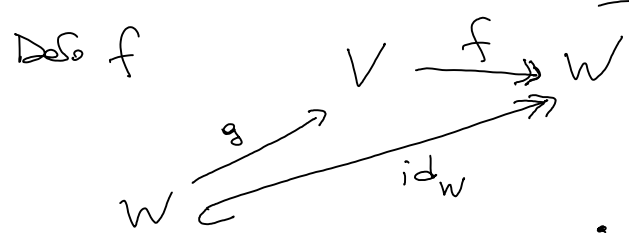
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ed es
 $\alpha = 0$
 $\mu = 0$

$B \in \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) + \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $= B_0$

non è un caso
 Sono le soluzioni del sist. omogeneo associato
 dentro la matrice trasposta che facciamo...

In conclusione le inverse sin di A sono tutte e sole
 del tipo $B_2 = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & \alpha \\ -\beta & 1 + \beta & \beta \end{pmatrix}$ al variare
 di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



esiste g t.c. $f \circ g = id_W$
 $\Leftrightarrow f$ è suriettiva

\Rightarrow base

\Leftarrow Suppongo f suriettiva. Sia U una base di V
 formata da vettori $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$ con

v_1, \dots, v_s base del $\text{Ker } f$. Essendo f suriettiva

$w_1 = f(v_{s+1}), \dots, w_m = f(v_n)$ formano una base di W ($m = n - s$)
 (guardare dimostraz. delle formule delle dimensioni!)

$g: W \rightarrow V$ $\langle f \circ g = \text{id}_W \rangle$ per costruzione

$$\begin{array}{ccc} w_1 & \longmapsto & v_{s+1} \\ w_2 & \longmapsto & v_{s+2} \\ \vdots & & \vdots \\ w_m & \longmapsto & v_n \end{array}$$

Esercizio Data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $f_A \quad x \mapsto Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

determinare tutte le inverse destre di f $\text{deg}(f)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_B} & \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \\ & \searrow \text{id} & \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} \quad AB = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ - & - \\ - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_6 = 1 \end{cases}$$

sist. 4 eq 6 incognite
 rango 4

... (calcoli esercizio)

$$B \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

\uparrow
 soluzione particolare

soluzioni di

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = (B_1, B_2)$$

\uparrow
 colonne

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia $B_1, B_2 \in \text{Ker } A = \text{Sol}(Ax=0)$
 \parallel
 $\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Ossevation Siano $A, B \in M_n(K)$ invertibili

AB è ancora invertibile

e la sua inversa è $B^{-1}A^{-1}$

$$\text{Dim } (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A1_nA^{-1} = AA^{-1} = 1_n$$

$GL_n(K)$ gruppo generale lineare delle matrici invertibili di ordine n

1_n el. neutro
 A^{-1} è l'inversa

Osservazione

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

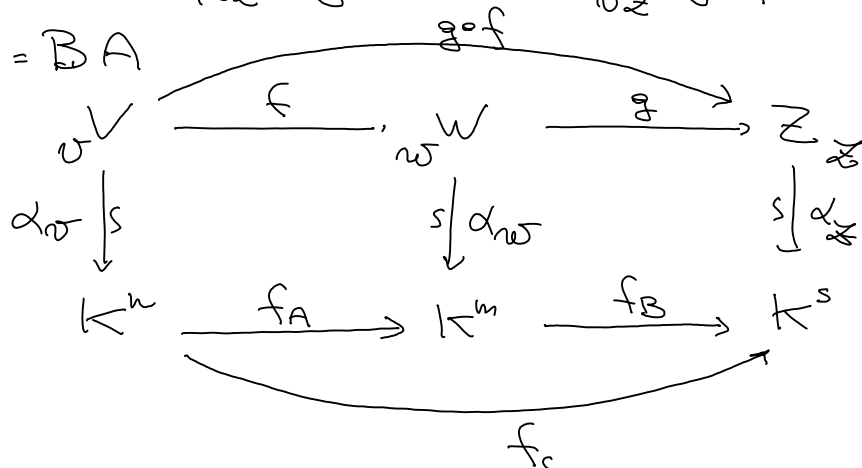
$$\mathcal{V} \quad \quad \mathcal{W} \quad \quad \mathcal{Z}$$

f, g K -lineari
 $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ basi
 fissate

$A = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}}(f) \quad B = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{Z}}(g) \quad C = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{Z}}(g \circ f)$

Allora $C = BA$

Infer.



$$\alpha_{\mathcal{Z}} \circ (g \circ f) = (\alpha_{\mathcal{Z}} \circ g) \circ f = (f_B \circ \alpha_{\mathcal{W}}) \circ f = f_B \circ f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}} = f_{BA} \circ \alpha_{\mathcal{V}}$$

$f_C \circ \alpha_{\mathcal{V}}$

$\Rightarrow f_{BA} = f_C \Rightarrow \boxed{BA = C}$

Ulteriore esercizio ($A \cdot (B + C) = AB + AC$)

proprietà associativa del prodotto di matrici:

$$(AB)D = A(BD)$$

se posso moltiplicarle.

$$f_{AB} \circ f_D = f_A \circ f_{BD}$$

$$(f_A \circ f_B) \circ f_D = f_A \circ (f_B \circ f_D)$$

~ associatività della
 composizione di
 applicazioni
 che è ben nota
 (inseparabile!)

(vedere quali altre proprietà del \cdot di matrici
 avremo lasciato da dimostrare e verificare!)

Esercizio

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$$\mathcal{Z} \longmapsto e^{i\theta} \mathcal{Z}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$

Verificare che e è \mathbb{R} -lineare e trovare la matrice di f risp. alla base
 canonica $\mathcal{Z} = \{1, i\}$

$$f \in \mathbb{R}\text{-linear} \quad \underbrace{e^{i\theta} (\alpha z + \beta z')}_{f(\alpha z + \beta z')} = \underbrace{\alpha e^{i\theta} z}_{f(z)} + \underbrace{\beta e^{i\theta} z'}_{f(z')} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

↑
lineare!

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\alpha\beta} \mathbb{R}^2 \\ z = a+ib &\mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ e^{i\theta} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{i\theta} \cdot (a+ib) &= a\cos\theta - b\sin\theta + i(a\sin\theta + b\cos\theta) \end{aligned}$$

$$e^{i\theta} (a+ib) \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}}_{\alpha(f(z))} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

da non dimenticare
Matrice di una rotazione nel piano.
1° el. di bas

1° colonna sono le coordinate di $f(\overset{1}{1}) = e^{i\theta} \cdot 1 = \cos\theta + i\sin\theta$

2° - - - - - $f(\overset{2}{i}) = e^{i\theta} \cdot i = i\cos\theta - \sin\theta$
2° el.

Esercizio Sia $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = U \oplus W$

Determinare le matrici di π_U^W risp. alla base canonica nel dom e codom
e rispetto ad una base a piacere nel dom. e codom.

$$\mathcal{B} = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

2 pezzi (uno nella base)

$$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\pi_U^W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑
coordinate di $\pi_U^W(v_1)$ nella base \mathcal{B}

←
coord di $\pi_U^W(v_2) = 0$ nella base \mathcal{B}

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\pi_U^W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

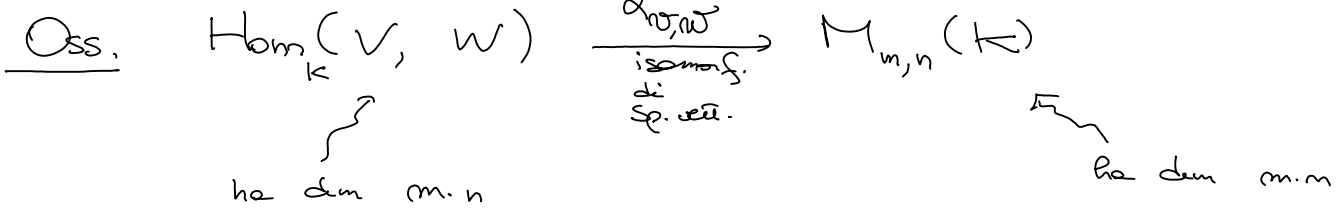
↑
coord $\pi_U^W(e_1)$ risp. a \mathcal{E}

↑
coord $\pi_U^W(e_2)$ risp. a \mathcal{E}

$$\pi_U^W(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$\pi_U^W(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi_U^W(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



(isomorf. mediante basi in basi)

$S = \{v_1, \dots, v_n\}$ $W = \{w_1, \dots, w_m\}$

qual è ~~una~~ la base di $\text{Hom}(V, W)$ che corrisponde alla base canonica di $M_{m,n}(K)$?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \bigcirc \end{pmatrix}$ qual è la funzione corrispondente $V \rightarrow W$?

