Geo 1 -mod A - Lez 20 - 27/11/2023

Note Title

$$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}} M_{m,n}(K)$$

$$f = f_A \longmapsto A$$

$$f_A : x \longmapsto Ax$$

$$f_A \longleftarrow A$$

isom. di K-sp. vett.

ogni $f : K^n \to K^m$ K-lineare

è $f = f_A$ per una unica $A \in M_{m,n}(K)$

$$e_1 \longmapsto f_A(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 \quad \text{1ª colonna di } A$$

$$e_i \longmapsto f_A(e_i) = A_i \quad \text{i-esima colonna di } A$$

e_i: i-esimo vettore di $\mathcal{E}$

A_i: coincide con le proprie coord. resp alla base $\mathcal{E}$

$$A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$$

$\mathcal{E}\mathcal{E}$: basi canoniche

Applicazione. Siano $B, C \in M_{m,n}(K)$, $A \in M_{r,m}(K)$

detto ma non dimostrato!

$$\underbrace{A \cdot (B + C)}_{\in M_{r,n}(K)} \overset{(**)}{=} AB + AC$$

Ricordo che $\bullet\ f_{A'B'} = f_{A'} \circ f_{B'}$ $\quad \bullet\ f_B + f_C = f_{B+C}$

$$f_{A\cdot(B+C)} = f_A \circ f_{B+C} = f_A \circ (f_B + f_C)$$

$$\overset{(*)}{=} f_A \circ f_B + f_A \circ f_C = f_{AB} + f_{AC} = f_{AB+AC}$$

Dunque $(**)$ vera!

$(*)$
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \quad K\text{-lineari}$$

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h \quad \text{Infatti}$$

$$[f \circ (g+h)](w) = f((g+h)(w)) = f(g(w) + h(w)) = f(g(w)) + f(h(w))$$

$$= (f \circ g)(w) + (f \circ h)(w)$$

{ rango per riga e rango per colonne (e rango di f)

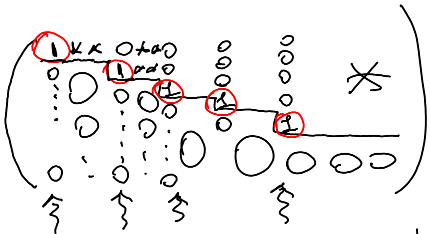
Sia $A \in M_{m,n}(K)$ $\rightsquigarrow$ $A' \in M_{m,n}(K)$ a scala ridotta

Algor. di Gauss

So $rg_{riga} A = rg_{riga} A'$

|| basta osservare questo

So $rg_{col.} A = rg_{col} A'$



$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_r \in K^m$

$rg_{riga} = \#$ pivot

$rg_{colonna}$ = dim sp. generato dalle colonne

$= r = \#$ pivot

perché tutte le colonne sono c. l. di $e_1 \dots e_r$

Sia ora $f = f_A : K^n \longrightarrow K^m$ K-lineare

$x \longmapsto Ax$

Formula delle dimensioni

$$\text{dim dominio} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{nullità } null_f} + \dim \operatorname{Im} f$$

$\overset{\shortparallel}{rg}(f)$ rango

$$n = null(f) + rg(f)$$

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in K^n \mid Ax = 0\} = Sol(Ax = 0)$$

$$null(f) = \dim Sol(Ax = 0) \underset{R.C.}{=} n - rgA$$

n = # incognite

$$n = n - rgA + rgf \implies \boxed{rgA = rgf}$$

Esempio. • Già osservato $\underset{f_A}{\overset{}{f}} : K^n \longrightarrow K^m$, $x \longmapsto Ax$ $\quad \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = A$

• $V = U \oplus W$ $\quad \pi_U^W : V \longrightarrow V$

$v = u + w \longmapsto u$

Fisso una base $\mathcal{V}$ su V con $\mathcal{V} = \{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots w_s\}$

$\dim V = r + s$ con $\{u_1 \dots u_r\}$ base di U e $\{w_1 \dots w_s\}$ base di W

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\pi_U^W)$; $u_1 \xmapsto{\pi_U^W} u_1$ ha coord $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_2 \longmapsto u_2 \; \dots \; \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$u_r \longmapsto u_r \; \dots \; e_r$

$w_1 \longmapsto 0$ le coord $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$w_s \longmapsto 0 \; \dots$

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\pi_U^W) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & \\ & & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Def Lemma Siano $f : V \longrightarrow W$ appl. K-lineare, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W allora $A := (A_1, \dots, A_n)$ con A_i le coordinate di $f(v_i)$ rispetto alla base $\mathcal{W}$

Ha le seg. proprietà: se $v \in V$ ha coordinate x rispetto alla base $\mathcal{V}$ allora $f(v)$ ha coordinate y rispetto alla base $\mathcal{W}$ e vale $\boxed{y = Ax}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \; V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"', "\wr"] & W \; \mathcal{W} \arrow[d, "\wr"', "\alpha_{\mathcal{W}}"] \\ K^n \arrow[r, "f_A"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$v \mapsto x$, $\quad w = f(v) \mapsto y$

$x \longmapsto Ax$

Se x sono le coordin di v (risp. a $\mathcal{V}$) allora Ax sono le coord. di $f(v)$ (risp a $\mathcal{W}$)

La matrice A si indica con $\boxed{\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)}$

Dim Da dim $\alpha_{\mathcal{W}} \circ f = f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}}$

Per vedere che 2 appl. lineari $V \longrightarrow K^m$ sono uguali basta verificare che coincidono su una base.

$(\alpha_{\mathcal{W}} \circ f)(v_j) = \alpha_{\mathcal{W}}(f(v_j)) = $ coord. di $f(v_j)$ risp alla base $\mathcal{W} = A_j$

$(f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}})(v_j) = f_A(\alpha_{\mathcal{V}}(v_j)) = f_A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j} = A \cdot \underbrace{e_1}_{e_j} = \underbrace{A_1}_{A_j}$

Esempio $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} \xrightarrow{\partial} \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \longmapsto a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

Fisso basi $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ dominio $\quad \mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ codom

$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\partial) = ? \quad \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$1 \longmapsto 0$$
$$x \longmapsto 1 \quad \text{ha coord} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$x^2 \longmapsto 2x \ \cdots\cdots \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$
$$x^3 \longmapsto 3x^2 \ \cdots \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\partial)$$

Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare. Sia $w \in W$

$$f^{-1}(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } w \notin \operatorname{Im} f \\ v_0 + \operatorname{Ker} f = \{ v_0 + v' \text{ con } v' \in \operatorname{Ker} f \} & \left(e\ f(v_0) = w \right) \end{cases}$$

In effetti se:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}\ V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr", "\alpha_{\mathcal{V}}"'] & W\ \mathcal{W} \arrow[d, "\wr"', "\alpha_{\mathcal{W}}"] \\
K^n \arrow[r, "f_A"] & K^m
\end{tikzcd}$$

$v \mapsto x$ $\qquad$ $w \mapsto y$

$$x \longmapsto Ax$$

$A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$

e prendo $w \in W$ di coordinate y

cercare $f^{-1}(w)$ equivale a cercare $\underset{\text{soluzioni di } Ax = y}{\underset{\shortparallel}{f_A^{-1}(y)}}$

$y \notin \operatorname{Im} f_A \iff w \notin \operatorname{Im} f$

se $y \in \operatorname{Im} f_A$, $x_0 \in f^{-1}(y) \iff$ vettore v_0 di coordinate x_0 appartiene a $f^{-1}(w)$

---

§ Matrici di cambio di base

Siano $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ basi (ordinate) di V K-sp. vettoriale

La matrice $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(id_V)$ si chiama matrice di cambio di base; ha la proprietà che se $v \in V$ ha coordinate x risp. alla base $\mathcal{V}$ allora v ha coord. Ax rispetto a $\mathcal{V}'$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}\ V \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"'] \arrow[rr, bend right, "id"'] & V\ \mathcal{V}' \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}'}"] & V\ \mathcal{V} \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"] \\
K^n \arrow[r] & K^n \arrow[r, dash] & K^n
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto Ax = y \longmapsto By = BAx = x$$

Avrei potuto considerare $B = \alpha_{v'v}(id_V)$

Osservo che se compongo le applicazioni in alto ottengo ${}_{v}V \xrightarrow{id} V_{v}$

. . . . sotto $K^n \xrightarrow{id} K^n$

$x \longmapsto x$

Dunque $BA = \mathbb{1}_n$. Dunque $\alpha_{vv'}(id)$ e $\alpha_{v'v}(id)$ sono una l'inversa dell'altra.

Abbiamo bisogno di un metodo per calcolare le inverse!

In K^3 ho la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\} = \mathcal{E}$ e fisso la base $\{e_1+e_2,\ e_2+e_3,\ e_1+e_3\} = v$

$$\alpha_{\mathcal{E}v}(id) = ? \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{v\mathcal{E}}(id) = ? \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \longmapsto e_1 = a_{11}(e_1+e_2) + a_{21}(e_2+e_3) + a_{31}(e_1+e_3) \qquad v_1 = e_1+e_2 \xrightarrow{id} e_1+e_2 \text{ coord risp. } \mathcal{E} \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se conosco questa matrice A allora le coord. di un vettore, ad es. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$ risp. alla base v sono date da $A\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$

<u>Osservazione</u> (Def) $A \in M_n(K)$ è invertibile $\iff \exists\, B \in M_n(K)$ t.c. $BA = AB = \mathbb{1}_n$. Indico con A^{-1} l'inversa

- Se esiste, inversa è unica, cioè se esistono B, C t.c. $BA = \mathbb{1}_n = AC$ allora $B = C$

<u>Dim</u> $B = B\mathbb{1}_n = BAC = \mathbb{1}_n C = C$

- $A \in M_n(K)$ $\quad f_A : K^n \longrightarrow K^n$

Se A è invertibile $f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{A^{-1}A} = f_{\mathbb{1}_n} = id_{K^n}$
allora f_A è automorfismo (invertibile!)

<u>A invertibile</u> $\iff \operatorname{Im} f_A = K^n \iff rk\, f_A = \underline{rk\, A = n}$

(A invertibile $\iff$ ha rango massimo)

$\iff$ la matrice a scala ridotta associata è $\mathbb{1}_n$

- Le operazioni elementari sulle righe di una matrice si ottengono moltiplicando a sx la matrice per una matrice elementare ossia una matrice ottenuta da $\mathbb{1}_n$ applicando alle righe una operaz. elementare (la corrisp. op. element.)

Esempio

Scambio 1ª e 2ª riga

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ho scambiato in } \mathbb{1}_2}^{\text{matr. elementare}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

↑ ho scamb. 2 righe

moltiplico 1ª riga per α

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{matr. el.}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix}$$

← 1ª riga molt per α

sommo alla 2ª riga α volte la 1ª

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}}^{\text{matr. elem.}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a + c & \alpha b + d \end{pmatrix}$$

In conclusione $\overset{\text{invertibile}}{\forall A} \xrightarrow{\text{op. elementari}} \mathbb{1}_n$

$$\underbrace{E_r \cdots E_2 E_1}_{A^{-1}} A = \mathbb{1}_n$$

Metodo

$$(A \mid \mathbb{1}_n) \xrightarrow[\text{sulle righe}]{\text{operaz. el.}} \underset{(E_1 A \mid E_1)}{\overset{}{E_1 (A \mid \mathbb{1}_n)}} \longrightarrow (\underbrace{E_r \cdots E_1 A}_{\mathbb{1}_n} \mid \underbrace{E_r \cdots E_1}_{A^{-1}})$$

Esercizio calcolare A^{-1} con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{op. el. sulle righe}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$