Geo 1 -mod A - Lez 19 - 15/11/2023

Note Title

Da dimostrare: $V = U \oplus W$

- ✓ • π_U^W è K-lineare
- ✓ • $\ker \pi_U^W = W$
- ✓ • $\operatorname{Im} \pi_U^W = U$
- ✓ • $\pi_U^W \circ \pi_U^W = \pi_U^W$

Es • σ_U^W è K-lineare

- • $\ker \sigma_U^W = 0$
- • $\operatorname{Im} \sigma_U^W = V$

$\Big\}$ σ_U^W è automorfism

- ✓ • $\sigma_U^W \circ \sigma_U^W = id_V$

$\pi_U^W : V \longrightarrow V$ è lineare. $\alpha \in K$

$v = u + w \longmapsto u$ $\qquad v' = u' + w' \quad u' \in U \quad w' \in W$

$$\pi_U^W(v + v') = \pi_U^W(\underbrace{u + w + u' + w'}_{(u+u')+(w+w')}) = u + u' = \pi_U^W(v) + \pi_U^W(v')$$

$$\pi_U^W(\alpha v) = \pi_U^W(\underbrace{\alpha u}_{\in U} + \underbrace{\alpha w}_{\in W}) = \alpha u = \alpha \pi_U^W(v)$$

Analogamente si vede che $\sigma_U^W : V \longrightarrow V$

$v = u + w \longmapsto u - w$

? $\ker \pi_U^W = \{ \underset{u+w}{v} \in V \text{ t.c. } \pi_U^W(v) = 0 \} = W$

sono i vettori di V del tipo $0 + w$ in $U \oplus W = V$

$\operatorname{Im} \pi_U^W = \{ v' \in V$ t.c. esiste un $v \in V$ con $\pi_U^W(v) = v' \}$

$v = u + w \qquad \pi_U^W(v) = u \in U$

Dunque $\operatorname{Im} \pi_U^W \subseteq U$. Verifico che sono $=$

Preso $u \in U \qquad \pi_U^W(u) = \pi_U^W(u + 0) = u \in \operatorname{Im} \pi_U^W$

Dunque $U = \operatorname{Im} \pi_U^W$ e vedo che π_U^W ristretto a U è l'identità di U in $U \subseteq V$

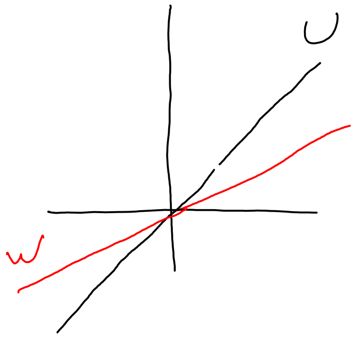
$$(\pi_U^W \circ \pi_U^W)(\underset{u+w}{v}) = \pi_U^W(\pi_U^W(u + w)) = \pi_U^W(u) = u = \pi_U^W(v)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, bend right, "id_V"'] & V \arrow[l, "\sigma_U^W"'] \arrow[r, "\sigma_U^W"] & V \end{tikzcd}$$

se dimostro che $\sigma_U^W \circ \sigma_U^W = id_V$ deduco che σ_U^W è biiettivo e coincide con la propria inversa

$$\sigma_U^W(\sigma_U^W(u+w)) = \sigma_U^W(\underbrace{u-w}_{u+(-w)}) = u-(-w) = u+w$$

Es $\mathbb{R}^2 = V$ $\quad U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle \quad W = \langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rangle$



$$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\pi_U^W : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \overbrace{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{u} + \overbrace{\mu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}^{w}$$

con λ e μ che dipendono da x e y

Trovare λ e μ significa risolvere il sistema

I metodo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & +1 & -y+x \end{array}\right)$$

$\lambda = x - 2\mu = -x + 2y$

$\mu = x - y$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{(-x+2y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{u} + \underbrace{(x-y)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{w}$$

$$\pi_U^W\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y-x\\2y-x\end{pmatrix}$$

$$\sigma_U^W\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2y-x\\2y-x\end{pmatrix} - (x-y)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3x+4y\\-2x+3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y-x-2x+2y\\2y-x-x+y\end{pmatrix}$$

II metodo

$U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle$ e ha eq $\quad X - Y = 0$

$W = \langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rangle$ . . . . . $\quad X - 2Y = 0$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

basta trovare questo!

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in W$

deve soddisfare $X - 2Y = 0$

$\begin{pmatrix}x-\lambda\\y-\lambda\end{pmatrix}$ deve essere soluz $X - 2Y = 0$

$$x - \lambda - 2(y-\lambda) = 0 \qquad x - 2y + \lambda = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \lambda = -x + 2y$$

Siano V, W sp. vett. su K

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_K(V,W)} := \{ f : V \longrightarrow W \quad K\text{-lineari} \}$$

è uno spazio vettoriale su K rispetto alle operaz. così definite

$$+ : \mathrm{Hom}_k(V,W) \times \mathrm{Hom}_k(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,W)$$

$$(f \;,\; g) \longmapsto f+g : V \longrightarrow W$$

$$v \longmapsto \underbrace{f(v) \underset{W}{+} g(v)}_{(f+g)(v)}$$

$$\cdot \quad K \times \mathrm{Hom}_k(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,W)$$

$$(\alpha \;,\; f) \longmapsto \alpha f : V \longrightarrow W$$

$$v \longmapsto \alpha\big(f(v)\big) = (\alpha f)(v)$$

4 + 4 condiz. da controllare (esercizio!)

Elemento neutro per $+$ è $0 : V \longrightarrow W$, $v \longmapsto 0$

Elem. opposto di f $\quad V \longrightarrow W$, $v \longmapsto -f(v)$

Osservo che se $V = U \oplus W$

$$\pi_U^W,\ \pi_W^U,\ \sigma_U^W,\ \sigma_W^U \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

$$\cdot\ \boxed{\pi_U^W + \pi_W^U = id_V} \rightsquigarrow \pi_U^W = id_V - \pi_W^U$$

$$\exists\, v \longmapsto v = u + w$$

$$\pi_U^W(v) = u \qquad \pi_W^U(v) = w \qquad (\pi_U^W + \pi_W^U)(v) = u + w$$

$$\cdot \quad v = u + w \qquad \sigma_U^W(v) = u - w = \pi_U^W(v) - \pi_W^U(v) \overset{!}{=} (\pi_U^W - \pi_W^U)(v) \overset{!}{=} (id - 2\pi_W^U)(v)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f = f_A \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\, f$ = soluz. $(Ax = 0)$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{\alpha}{5} \\ x_2 = -\frac{\alpha}{5} \\ x_3 = \alpha \end{array}$

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle \leftarrow \dim 1$$

$\dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 1 = 2 \Rightarrow f$ è suriettiva.

Sia $v \in \mathbb{R}^2$ $\quad f^{-1}(v) = ?$

Ad es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } \underbrace{A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sist non omogeneo}} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

matrice iniziale

Soluzione particolare si ottiene ponendo il parametro x_3 uguale a 0

$x_1 = 1 - 2/5 = 3/5$

$x_2 = -2/5$

$x_3 = 0$

$\begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ soluz. particol.

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \alpha \in K \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Abbiamo visto che dato $A \in M_{m,n}(K)$ l'applicazione

$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad x \longmapsto Ax$ è K-lineare

Viceversa sia $f : K^n \longrightarrow K^m$ K-lineare e

$$\begin{array}{l} e_1 \longmapsto A_1 = f(e_1) \\ e_2 \longmapsto A_2 \\ \vdots \\ e_n \longmapsto A_n \end{array}$$

Definisco $A := (A_1, A_2, \dots A_n) \in M_{m,n}(K)$

$K^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ $\quad f(x) = f\left(\sum x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

$$= \sum x_i A_i = Ax = f_A(x).$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ & & & \\ & & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tutte le appl. lineari $K^n \longrightarrow K^m$ sono del tipo f_A

$$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \xrightarrow{\text{biiezione}} M_{m,n}(K)$$

isomorf. di K-sp. vettoriali

$$f = f_A \longmapsto A$$

$$f_{A+B} = f_A + f_B \longmapsto A+B$$

$$\underbrace{\alpha f_A}_{= f_{\alpha A}} \longmapsto \alpha A$$

verificarlo! basta verificarlo sui vettori della base canonica.

$$(f_A + f_B)(e_1) = f_A(e_1) + f_B(e_1) = \underset{\text{1ª colonna di } A}{A_1} + \underset{\text{1ª colonna di } B}{B_1} = \underset{\text{1ª colonna di } A+B}{(A+B)_1}$$

$$= f_{A+B}(e_1)$$

. . . . .

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[rd, bend right, "f_{BA}"'] & K^m \arrow[d, "f_B"] \\ & K^r \end{tikzcd}$$

$A \in M_{m,n}(K)$

$B \in M_{r,m}(K)$

$BA \in M_{r,n}(K)$

Si verifica che $\boxed{f_B \circ f_A = f_{BA}}$

Basta verificare che $(f_B \circ f_A)(e_i) = f_{BA}(e_i)$ $\forall\ 1 \le i \le n$
perché una appl.
lineare è individuata dai
valori che assume sui vettori di una base.

$f_{BA}(e_i) = (BA)_i$ colonna i-esima della matrice BA

$$(f_B \circ f_A)(e_i) = f_B(f_A(e_i)) = f_B(\overset{\text{colonna i-esima di } A}{A_i}) = BA_i \underset{\text{per def. del prodotto tra matrici}}{=} (BA)_i$$

$\square$

Questo servirà per associare una matrice ad una qualsiasi appl. lineari.

~~Def~~ Siano $f: V \longrightarrow W$ appl. K-lineare, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$
Lemma
una base di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W
allora $A := (A_1, \dots, A_n)$ con A_i le coordinate di
$f(v_i)$ rispetto ~~alla~~ base $\mathcal{W}$

Ha le seg. proprietà: se $v \in V$ ha coordinate x
rispetto alla base $\mathcal{V}$ allora $f(v)$ ha coordinate y
. . . . . . $\mathcal{W}$ e vale $\boxed{y = Ax}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \quad V \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"', "\wr"] & & W \quad \mathcal{W} \arrow[d, "\wr"', "\alpha_{\mathcal{W}}"] \\
K^n \arrow[rr, "f_A"'] & & K^m
\end{tikzcd}
\qquad
v \mapsto x, \quad w = f(v) \mapsto y
$$

$$x \longmapsto Ax$$

(da dimostrare)

Vedere svolgimento es. Lez 17 (aggiunta in blu)