Geo 1 -mod A - Lez 18 - 14/11/2023

Note Title

Iscriversi alla lista del compitino in Moodle!
Dovete entrare registrandovi e <u>non</u> come ospiti.
Domani 15/11 ricevimento in 1A150 8:30 – 9:15
2 ore di lezione ... 10:30 – 12:15

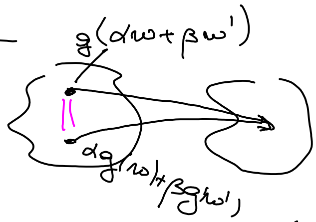
Sia $f: V \longrightarrow W$ appl. lineare

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ $\quad\quad$ $\operatorname{Im} f = f(V) = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}$

Se f è lineare e biiettiva $\Rightarrow f^{-1}$ è pure lineare

<u>Dim</u> sia $g = f^{-1}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "f"] & W \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$



Devo vedere che $g(\alpha w + \beta w')$
$= \alpha g(w) + \beta g(w') \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall w, w' \in W$

Poiché $\underset{\text{biiettiva}}{f}$ e g sono una l'inversa dell'altra (insiemisticamente)

basta vedere che $f(\underbrace{g(\alpha w + \beta w')}) \overset{\text{sì}}{=} f(\alpha g(w) + \beta g(w'))$ perché f linea.
$\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha w + \beta w' \qquad\qquad = \alpha f(g(w)) + \beta f(g(w')) = \alpha w + \beta w'$

Dunque f lineare e biiettiva $\Rightarrow f$ isomorfismo.

<u>Lemma</u> Sia $f: V \longrightarrow W$ $\mathbb{K}$-lineare.
f è iniettiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0$

<u>Dim</u> $\Rightarrow$) sia $v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = 0_W$. E però $f(0_V) = 0_W$
$\Rightarrow v = 0_V$ perché f è iniettiva.

$\Leftarrow$) Siano $v, v' \in V$ t.c. $f(v) = f(v')$
Osservo che $0_W = f(v) - f(v') = f(v - v')$
Dunque $v - v' \in \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow v - v' = 0_V \Rightarrow v = v'$

Osservo $f: V \longrightarrow W$ K-lineare è suriettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = W$
(realtà insiemistica!)

Formule delle dimensioni (rango + nullità)

Lemma Sia $f: V \longrightarrow W$ (K-lineare) con V finit. generato

Allora $\dim V = \underbrace{\dim \mathrm{Ker} f}_{\text{nullità di } f} + \underbrace{\dim \mathrm{Im} f}_{\text{rango di } f}$

Osservazione. Se $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ allora $f(V) = \langle f(v_1), \dots f(v_n) \rangle$

Infatti. $v \in V$ $v = \sum \alpha_i v_i$ $f(v) = \sum \alpha_i f(v_i)$

Dim (lemma). $\mathrm{Ker} f \leq V$ $\left(\begin{array}{l} = V \text{ se } f = 0 \\ \text{è } 0 \text{ se } f \text{ è iniettiva} \end{array} \right)$

Sia $v_1, \dots, v_r$ una base di $\mathrm{Ker} f$; se $\mathrm{Ker} f = 0$ avrò $r = 0$
e nessun vettore.

Completo $v_1, \dots, v_r$ ad una base di V

$\{ \underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{base di Ker} f}, v_{r+1}, \dots v_n \}$ $\quad r = \dim \mathrm{Ker} f$, $n = \dim V$

Voglio dimostrare che $n = r + \dim \mathrm{Im} f$ ossia $\dim \mathrm{Im} f = n - r$

$\mathrm{Im} f = f(V) = \langle \cancel{f(v_1)}, \dots, \cancel{f(v_r)}, \underbrace{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)}_{\substack{n-r \\ \text{generatori}}} \rangle$ (con $f(v_1) = 0_W$, $\dots$, $f(v_r) = 0_W$)

Per concludere basta dimostrare che $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ sono l. indip.

$$0_W = \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i f(v_i) = f\Big(\underbrace{\sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i v_i}_{\in \mathrm{Ker} f} \Big)$$

$$\sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_j v_j$$
vettori di base di $\mathrm{Ker} f$

$$0_V = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r - \alpha_{r+1} v_{r+1} - \dots - \alpha_n v_n$$

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0$ $\quad \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$ perché $v_1 \dots v_n$
è base di V $\blacksquare$

Esempio $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_1 - a_3 + a_2 + (a_1 + a_2)x$$

è lineare! (esercizio)

$\operatorname{Ker} f \overset{?}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } a_1 - a_3 + a_2 + (a_1 + a_2)x = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } a_1 - a_3 + a_2 = 0 = a_1 + a_2 \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$a_1 = -\lambda$
$a_2 = \lambda$
$a_3 = 0$

$= \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1 \qquad \dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \qquad \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$

$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle 1+x, \cancel{1+x}, -1 \rangle$

$= \langle 1+x, 1 \rangle = \langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle$

$\hookrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$

$f: V \longrightarrow W$

$$\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

($\dim \operatorname{Ker} f \leq \dim V$, $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim W$)

Conseguenze

- Suppongo $\dim V > \dim W$; allora f non è iniettiva (MAI)

  $\mathbb{R}^5 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$ mai iniettiva.

- Suppongo $\dim V < \dim W$; allora f non è mai suriettiva.

  Se f è suriettiva $\dim W = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim V < \dim W$ ↯

  es. $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ mai suriettiva

Osservo Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare con $\dim V = \dim W$.

- f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ f è suriettiva

Infatti: $\Rightarrow$) Sia f iniettiva $\quad \underset{n}{\dim V} = \underset{0}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f$

Dunque $\dim \operatorname{Im} f = \dim V = \dim W \Rightarrow \operatorname{Im} f = W \Rightarrow f$ suriett.

$\Leftarrow$) sia f suriettiva. $\operatorname{Im} f = W$

$$\cancel{\dim V} = \dim \ker f + \cancel{\underset{\operatorname{Im} f}{\dim W}} \Rightarrow \dim \ker f = 0 \Rightarrow \ker f = 0$$

Esempio Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} e_1 &\longmapsto e_3+e_1 \\ e_2 &\longmapsto e_2+e_1 \\ e_3 &\longmapsto e_3 \end{aligned}$$

Osservo $f(\mathbb{R}^3) = \langle e_3+e_1, e_2+e_1, e_3 \rangle$

e che i generatori sono l. ind. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f$ suriettiva $\Rightarrow \ker f = 0$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare suriettiva è automorfismo

---

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \qquad f: V \to W$$

Oss

- f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f manda basi di V in basi di $\operatorname{Im} f$

  $\Updownarrow$

  $\underbrace{\dim V}_{n} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{n}$ $\quad V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad \operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots f(v_n) \rangle$ sono n generatori in numero "giusto" $\Rightarrow$ formano base.

  Viceversa se $v_1 \dots v_n \rightsquigarrow f(v_1), \dots f(v_n)$ base di $\operatorname{Im} f \Rightarrow n = \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \ker f = 0$

- f è suriettiva $\Leftrightarrow$ f manda generatori di V in generatori di W

  $\Updownarrow$

  $\operatorname{Im} f = W \Leftrightarrow f(V) = W$

- f è isomorfismo (biiettiva) $\Leftrightarrow$ f manda basi di V in basi di W

lo useremo molto!

Segue dalle prime 2.

Esempi IMPORTANTI di appl. lineari

Sia V uno sp. vett. su K e sia $V = U \oplus W$

Definisco $\pi_U^W : V \longrightarrow V$ proiezione su U nella direzione di W

$$\underset{u+w}{\overset{\shortparallel}{v}} \longmapsto \underset{u}{\overset{\shortparallel}{\pi_U^W(v)}}$$

decomposiz. unica $u \in U$, $w \in W$

Definisco $\sigma_U^W : V \longrightarrow V$ simmetria di asse U e direzione W

$$\underset{u+w}{\overset{\shortparallel}{v}} \longmapsto u - w$$

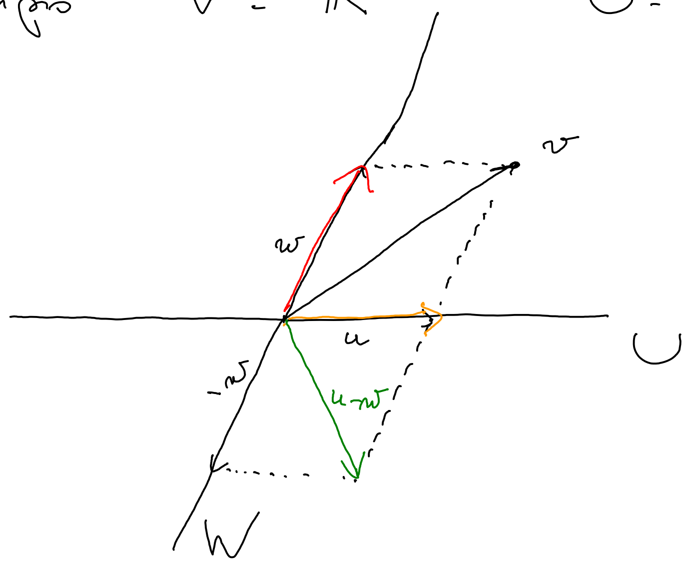
Da dimostrare: $V = U \oplus W$

- π_U^W è K-lineare
- $\ker \pi_U^W = W$
- $\operatorname{Im} \pi_U^W = U$
- $\pi_U^W \circ \pi_U^W = \pi_U^W$

- σ_U^W è K-lineare
- $\ker \sigma_U^W = 0$ } σ_U^W è automorfism
- $\operatorname{Im} \sigma_U^W = V$
- $\sigma_U^W \circ \sigma_U^W = id_V$

(provare a dimostrarle, le riprendiamo domani)

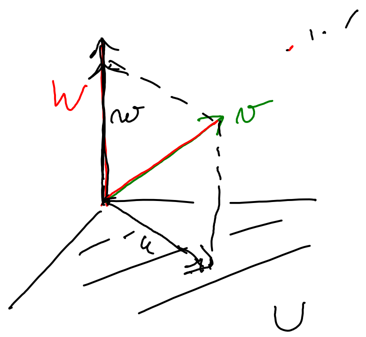
Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$



$\pi_U^W(v) = u$

$\sigma_U^W(v) = u - w$

NB $\pi_W^U(v) = w$



$\pi_U^W(v) = u$

Esercizio
$$\begin{cases} x_1 + a x_2 + b x_3 = c \\ 2x_1 + (b+a)x_2 + (1+2b)x_3 + c\, x_4 = 2c-1 \\ c\, x_1 + ac\, x_2 - x_4 = c^2 \end{cases}$$
con parametri $a, b, c \in K$

Studiare i ranghi delle matrici completa e incompleta e stimare il numero delle soluz. del sistema quando esistono.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & 0 & c \\ 2 & b+a & 1+2b & c & 2c-1 \\ c & ac & 0 & -1 & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - c\text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & 0 & c \\ 0 & b-a & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & -bc & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Inizio discussione

1) $b-a=0$, $b=a$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & -ac & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{III+acII}{\leadsto}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+ac^2 & -ac \end{array}\right)$$

1.1) $ac^2-1=0$

$ac^2=1 \Rightarrow a\neq 0$, $c\neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ac \end{array}\right)$$

$rg\,A=2 < rg(A|b)=3$ NO soluzioni $\left(\begin{array}{c} b=a \\ ac^2=1 \end{array}\right)$

1.2) $ac^2-1\neq 0$ $rg\,A=3=rg(A|b)$

soluzioni sono ∞^1 $\left(\ \right)+\langle\left(\ \right)\rangle$

2) $b\neq a$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & 0 & c \\ 0 & b-a & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & -bc & -1 & 0 \end{array}\right)$$

2.1) $b=0$ $(a\neq 0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & -a & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$rg\,A=rg(A|b)=3$

∞^1 soluz.

$\left(\ \right)+\langle\left(\ \right)\rangle$

2.2) $c=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

idem.

2.3) $bc\neq 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & b & 0 & c \\ 0 & b-a & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & -bc & -1 & 0 \end{array}\right)$$

idem.

Domanda calcolare le soluzioni nel caso 2.1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & -a & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1=c-1-d$

$x_2=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}d$

$\boxed{x_3=d}$ → parametro delle soluz.

$x_4=0$

$-ax_2+\underset{d}{x_3}+\cancel{cx_4}=-1$ $\qquad x_2=\frac{-1-d}{-a}=\frac{1+d}{a}$

$x_1+ax_2=c$ $\qquad x_1=c-1-d$

$$\left\{ \begin{pmatrix} c-1 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ d \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} c-1 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Domanda</u>

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$e_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f = ?$

$\operatorname{Im} f = ?$