Geo1 - mod A - Lez 17 - 13/11/2023

Note Title

Appl. lineari: $f: V \longrightarrow W$ $\quad V, W$ sono K-sp. vett.

$$f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v') \quad \forall \alpha, \beta \in K \text{ e } v, v' \in V$$

Esempio: sia $A \in M_{m,n}(K)$; se $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$ R_i sono le righe di A

$$f_A: K^n \longrightarrow K^m$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \underset{(m \times \cancel{n}) \cdot (\cancel{n}, 1)}{Ax} = \begin{pmatrix} R_1 x \\ R_2 x \\ \vdots \\ R_m x \end{pmatrix}$$

f_A è lineare: siano $x, x' \in K^n$ allora

- $$\underbrace{A(x+x')}_{f_A(x+x')} = \underset{f_A(x)}{\overset{\shortparallel}{Ax}} + \underset{f_A(x')}{\overset{\shortparallel}{Ax'}}$$

basta controllare le singole righe

$R_1 = (a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n})$

$$R_{\underset{j}{1}}(x+x') = \sum_{i=1}^{m} a_{\underset{j}{1}i}(x_i + x_i') = \sum a_{\underset{j}{1}i} x_i + \sum a_{\underset{j}{1}i} x_i'$$
$$\overset{!}{=} R_{\underset{j}{1}} x + R_{\underset{j}{1}} x'$$

- $$A(\alpha x) \overset{?}{\underset{\text{sì}}{=}} \alpha A x \qquad \text{basta controllare le righe}$$

$$R_{\underset{j}{1}}(\alpha x) = \sum a_{\underset{j}{1}i}(\alpha x_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{\underset{j}{1}i}\, \alpha\, x_i = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{\underset{j}{1}i} x_i$$
$$\overset{!}{=} \alpha R_{\underset{j}{1}} x$$

Mostreremo: ogni $f: K^n \longrightarrow K^m$ è uguale a f_A per una opportuna matrice A.

~

NON esempio $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x^2$ $\qquad$ non è lineare

$f(\alpha x) = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 \neq \alpha x^2$ in generale.

$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \neq x^2 + y^2$ in generale

~

Osservazioni (importante!) 1

Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $f: V \to W$ un' appl. K-lineare. Allora f è determinata univocamente (in modo unico) dalle immagini $f(v_1), \dots, f(v_n)$ in W.

Infatti: se $v \in V$ qualsiasi: $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ con $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}}(v) \in K^n$ le coordinate di v nella base $\mathcal{V}$

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } f \text{ è lineare}}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$$

quindi $f(v)$ si scrive come c. l. dei vettori $f(v_1), \dots f(v_n)$ con coeff. le sue coordinate, che sono uniche!

Sia $g: V \to W$ una appl. lineare t.c. $g(v_i) = f(v_i)\ \forall v_i \in \mathcal{V}$

$$g(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(v_i) = \sum a_i f(v_i) = f(v)$$

se $v = \sum a_i v_i$

Dunque f e g coincidono su tutto V.

2 Siano V e W K-sp. vettoriali

$v_1, \dots, v_r$ sono vettori l. ind. di V.

Scelti $w_1, \dots, w_r \in W$ esistono in generale più di una appl. lineare $V \xrightarrow{f} W$ t.c. $f(v_i) = w_i$

Esempio $\underset{V}{\mathbb{R}^2} \dashrightarrow \underset{W}{\mathbb{R}}$

$r = 1 \quad v_1 = e_1 \quad w_1 = 3$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ e_1 &\mapsto 3 \\ e_2 &\mapsto 0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 &\mapsto 3x_1 + 0x_2 = 3x_1 \end{aligned} \qquad \neq \qquad \begin{aligned} f': \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ e_1 &\mapsto 3 \\ e_2 &\mapsto 8 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto 3x_1 + 8x_2 \end{aligned}$$

Se $r = \dim V$ allora ne ho una sola,

se $r < \dim V$ - - - - - - - infinite (posso completare $v_1, \dots, v_r$ ad una base di V e scegliere arbitrariam. $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$)

③ Siano V, W sp. vettoriali

$v_1, \dots, v_k$ generatori di V e $w_1, \dots, w_k \in W$

Esiste appl. lineare $f : V \longrightarrow W$ t.c. $f(v_i) = w_i$?

$\mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2$

$k=3$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

l. dipend.

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$f\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}\Big) = f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

NO

In generale No: se i v_i sono l. dip. anche i vettori w_i devono avere le stesse dipendenze ossia se

$$\sum a_i v_i = 0 \quad \text{anche} \quad \sum a_i w_i = 0$$

stessi?

Def Sia $f : V \longrightarrow W$ K-lineare.

Il nucleo di f è il sottoinsieme* di V $\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) = 0_W \}$

L'immagine di f . . . .* di W $\operatorname{Im} f = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}$

*Lemma. Nucleo di f è un sottosp. vett. di V (e chiameremo nullità di f la $\dim \operatorname{Ker} f$)

. L'immagine di f è un sottosp. vett. di W (e chiameremo rango di f la $\dim \operatorname{Im} f$)

Dim (esercizio)

↑ con i dettagli

Lemma Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare e sia $U \leq V$.
Allora $f(U) \leq W$.

(NB) Se prendo $U = V$, $f(U) = \operatorname{Im} f$ e dunque ricavo la 2ª parte del lemma sopra.

Dim Verifico che $f(U)$ è chiuso per c.l. di lunghezza 2. (II crit)
Siano $w_1, w_2 \in f(U)$ e siano $\alpha, \beta \in K$. Voglio verificare che $\alpha w_1 + \beta w_2 \in f(U)$

$w_1 = f(u_1)$ esiste un $u_1 \in U$

$w_2 = f(u_2)$ - - - - - $u_2 \in U$

$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ perché U è sottospazio di V

$$f(U) \ni f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) = \alpha w_1 + \beta w_2$$

∎

Lemma Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare e sia $U \leq W$.
Allora $f^{-1}(U) = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) \in U \} \leq V$

(NB) se prendo $U = \{0\}$ $f^{-1}(U) = \operatorname{Ker} f$ e quindi trovo la prima parte del 1° lemma.

Dim Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(U)$ e $\alpha, \beta \in K$.
Voglio vedere che $\alpha v_1 + \beta v_2 \in f^{-1}(U)$.

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \underbrace{\alpha f(v_1) + \beta f(v_2)}_{\in U}$$

NB $f(v_1) \in U$, $f(v_2) \in U$ ← sottosp. di W

$$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in f^{-1}(U)$$

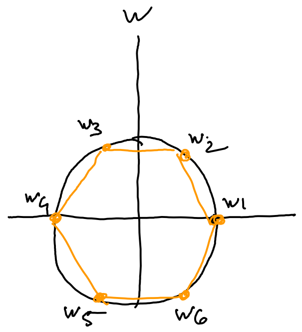
∎

Esercizio: $(z - i)^6 - a = 0$ con $a \in \mathbb{R}_{>0}$ fissato

$w = z - i$ $\qquad w^6 = a = a e^{i0}$ $\qquad w = \sqrt[6]{a} \cdot e^{i\theta_j}$

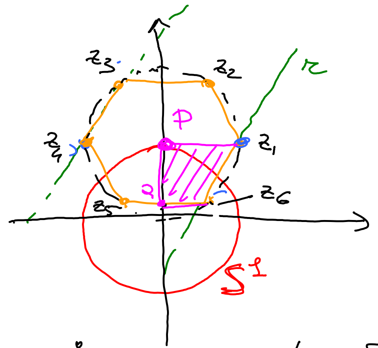
$$\theta_j = \frac{0 + 2k\pi}{6} = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

Poniamo $a = 1$ e:
Disegnare le radici e determinare le eq. (parametriche) delle rette contenenti i lati dell'esagono di vertici le radici.



$1,\ -1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z = w + i$



$P = (0, 1)$

$Q = \left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\underset{z_1}{1+i},\ \underset{z_4}{-1+i},\ \pm\frac{1}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \begin{matrix} z_2 \\ z_3 \end{matrix}$

$\pm\frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \begin{matrix} z_5 \\ z_6 \end{matrix}$

Ho coppie di rette parallele : $\underbrace{ax+by}_{\text{sono gli stessi per rette parallele}} + \overset{\text{cambia}}{c} = 0$

$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$: rette parallele hanno la stessa α

Trovo C ad esempio sostituendo le coord. di un punto.

Ricordo : • se z, w sono allineati con l'origine $z\bar{w} = \bar{z} w$

• se z_1, z_0 pt. piano AG. l'eq. della retta per z_1, z_0

$(z - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = (\bar{z} - \bar{z}_0)(z_1 - z_0)$ - - -

Avevamo visto $\alpha = i(z_1 - z_0)$ $\qquad C = 2\,\Im(z_1 \bar{z}_0)$

Retta per $\overset{\text{ruolo di } z_0}{z_1 : 1+i}$ e $\overset{\text{ruolo di } z_1}{z_6 = \frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\alpha = i\left[\frac{1}{2} + i\left(\cancel{1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - \cancel{i}\right] = i\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

$C = 2\,\Im\left[\underbrace{\left(\frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)(1 - i)}\right] = 2\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}$

retta $r_{z_1 z_6}$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{2}} i\right) z + \left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{2}} i\right)\bar{z} + 2(1 - \sqrt{3}) = 0$

$r_{z_3 z_4}$: $(\sqrt{3} + i) z + (\sqrt{3} - i)\bar{z} + C = 0$ $\qquad$ ⚠ sostituisco $-1+i$ e trovo C

oppure rifaccio i calcoli

• Calcolare l'eq. della circonf ottenuta per inversione circolare di ciascuna retta, il suo centro e raggio e

calcolare l'immagine tramite l'inversione circolare del quadrilatero $P\,Q\,z_1\,z_6$ (continua domani) retta $z_5 z_6$ parallela asse reale: $y = 1-\frac{\sqrt3}{2}$ $\quad -iz + i\bar z - 2 + \sqrt3 = 0$

inversa risp. a S^1 $\quad -iz + i\bar z + (\sqrt3-2) z\bar z = 0 \quad z\bar z + \frac{i}{2-\sqrt3} z - \frac{i}{2-\sqrt3}\bar z = 0$

centro $\frac{i}{2-\sqrt3} = (2+\sqrt3)i$ e raggio $2+\sqrt3$.

retta $z_2 z_3 \parallel z_5 z_6$ $\quad y = 1+\frac{\sqrt3}{2}$. $\quad -iz + i\bar z - 2 - \sqrt3 = 0$

inversa risp. a S^1 $\quad z\bar z + \frac{i}{2+\sqrt3} z - \frac{i}{2+\sqrt3}\bar z = 0$ $\quad$ centro $\frac{i}{2+\sqrt3} = (2-\sqrt3)i$ e raggio $2-\sqrt3$

retta $z_1 z_2$. $\quad z_1 = 1+i \quad z_2 = \frac12 + (1+\frac{\sqrt3}{2})i \quad y = -\sqrt3 x + \sqrt3 + 1 \quad \sqrt3 x + y - \sqrt3 - 1$

$(\sqrt3 - i)z + (\sqrt3+i)\bar z - 2\sqrt3 - 2 = 0$

$\alpha = i(z_2 - z_1) = i\left(-\frac12 + \frac{\sqrt3}{2} i\right) = -\frac{\sqrt3}{2} - \frac12 i$ $\qquad C = 2\Im(z_2 \bar z_1) = 2\left(-\frac12 + 1 + \frac{\sqrt3}{2}\right) = 1 + \sqrt3$

è quella sopra se moltiplico per -2

diventa $\frac{-\sqrt3+i}{2} z + \frac{-\sqrt3-i}{2}\bar z + 1 + \sqrt3 = 0$

Inversione è $-\frac{(\sqrt3-i)}{2(\sqrt3+1)} z - \frac{\sqrt3+i}{2\sqrt3+2}\bar z + z\bar z = 0$; centro $\frac{\sqrt3+i}{2\sqrt3+2}$ e raggio $\frac{1}{\sqrt3+1}$

retta $z_1 z_6$ $\quad z_1 = 1+i \quad z_6 = \frac12 + (1-\frac{\sqrt3}{2})i \quad y = \sqrt3 x - \sqrt3 + 1$

$(\sqrt3+i)z + (\sqrt3-i)\bar z - 2\sqrt3 + 2 = 0$

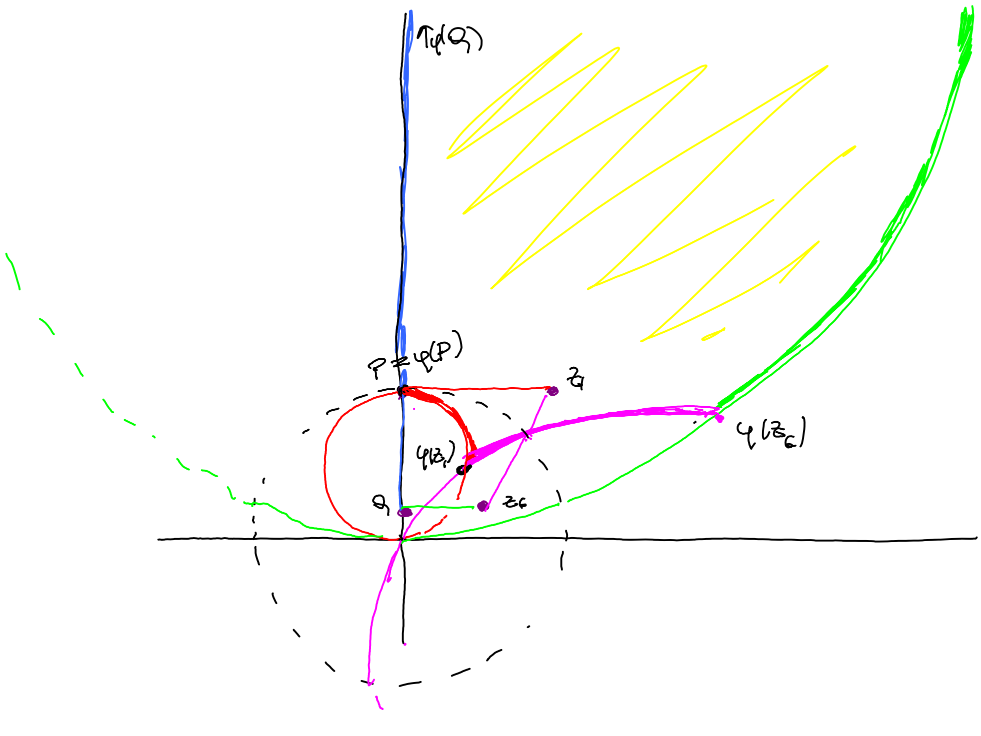
Inversione è $-\frac{\sqrt3+i}{2\sqrt3-2} z - \frac{\sqrt3-i}{2\sqrt3-2}\bar z + z\bar z = 0$ $\quad$ centro $\frac{\sqrt3-i}{2\sqrt3-2}$ e raggio $\frac{1}{\sqrt3-1}$

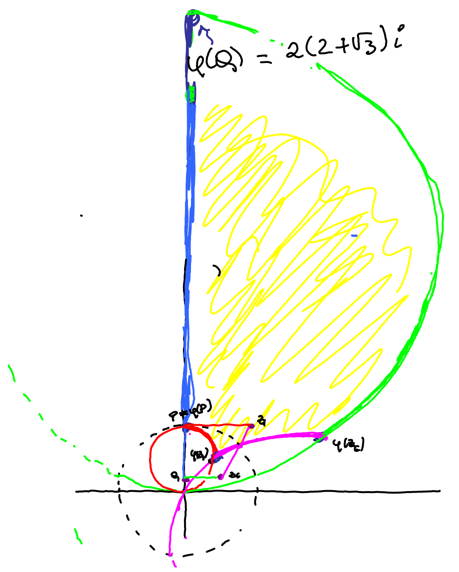
$z_2 z_4 \parallel z_1 z_6$ e simmetrica rispetto all'asse immaginario di $z_1 z_2$ $\quad y = \sqrt3 x + \sqrt3 + 1$

$(\sqrt3+i)z + (\sqrt3-i)\bar z + 2\sqrt3 + 2 = 0$

$z_4 z_5 \parallel z_1 z_2$ e simmetrica di $z_1 z_6$ rispetto all'asse immaginario $\quad y = -\sqrt3 x - \sqrt3 + 1$

$(\sqrt3 - i)z + (\sqrt3+i)\bar z + 2\sqrt3 - 2 = 0$





$P = (0, 1+i)$

$Q = (0, 1-\frac{\sqrt3}{2})$

$z_1 = 1+i$

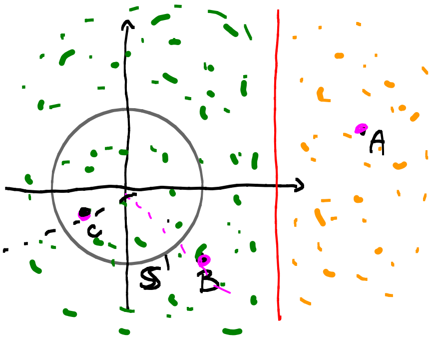
$z_6 = \frac12 + i(1-\frac{\sqrt3}{2})$

Pagina ⊛ di ripasso

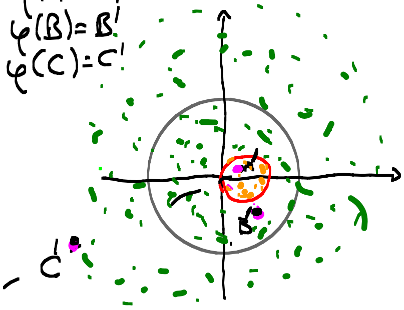
Inversione rispetto alla circonf unitaria $\quad z \longmapsto \frac{1}{\bar z} = \frac{z}{|z|^2}$ in $\mathbb{C}^*$

$z = \rho e^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{\rho} e^{i\theta}$,,

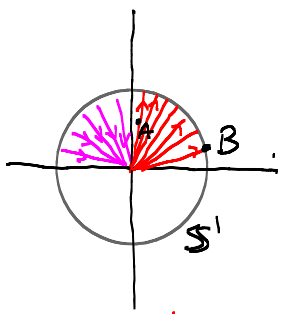
$x+iy \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$

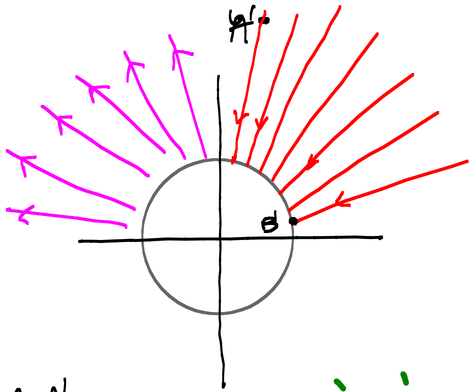


$\varphi(A) = A'$
$\varphi(B) = B'$
$\varphi(C) = C'$

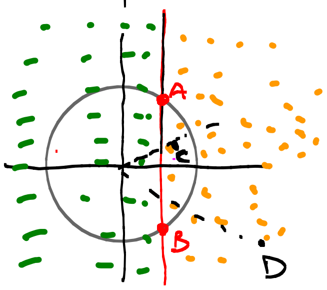


semipiano disgiunto da S^1 ⟶ interno del ○

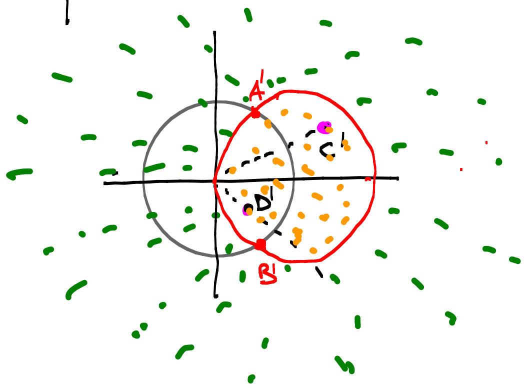




interno S^1 ⟷ esterno S^1

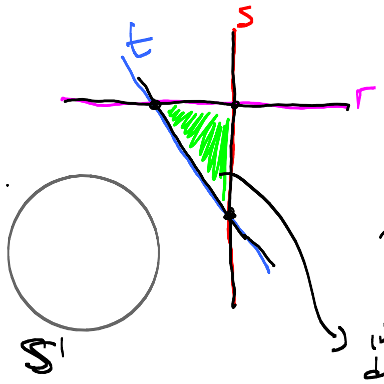


$A = A'$
$B = B'$



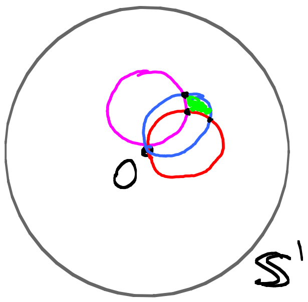
semipiano che interseca S^1 e non contiene Origine ⟶ interno ○

NB rette per O vengono mandate in sé



? ⇝

intersezione di 3 semipiani



esterna a ○ ○ '' interna a ○

- ▽ è contenuto nel semipiano che contiene anche l'origine (nemmeno S^1)

Dunque $\varphi(▽)$ è esterno a $○ = \varphi(r)$

- ▽ è contenuto nel semipiano che contiene anche S^1

$\Rightarrow \varphi(▽)$ è esterno a $○ = \varphi(s)$

- ▽ è contenuto nel semipiano che non contiene l'origine

$\Rightarrow \varphi(▽)$ è interno a $○ = \varphi(t)$