Geo 1 - mod A - Lez 16 - 07/11/2023 parte 2

§ APPLICAZIONI LINEARI (morfismi di sp. vettoriali)

Sia $f: V \longrightarrow W$ una applicazione (mappa) (funzione) (insiemistica) tra 2 sp. vett. sullo stesso campo K.

f si dice K-lineare se soddisfa le seguenti condizioni

a) $f(v_1 +_V v_2) = f(v_1) +_W f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

(f rispetta la somma)

b) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in V \quad \alpha \in K$

prodotto per lo scalare in V — prodotto per lo scalare in W

(f rispetta il prodotto per lo scalare)

o equivalentemente se c) $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$
$\forall \alpha, \beta \in K$ e $v_1, v_2 \in V$

Se a) e b) valgono allora $f(\alpha v_1 + \beta v_2) \overset{b)}{=} f(\alpha v_1) + f(\beta v_2)$
$\overset{a)}{=} \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$ ossia c) vale

<u>Esercizio</u> verificare che se f soddisfa c) allora soddisfa a) e b)

<u>Esercizio</u> Mostrare che $f: V \longrightarrow W$ è K-lineare $\Leftrightarrow$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, v_i \in V$$

(ossia f è lineare $\Leftrightarrow$ rispetta le comb. lineari)

<u>Esempi</u> • $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x$ è $\mathbb{R}$-lineare

$x, x' \in \mathbb{R}$ • $f(x+x') = 2(x+x') = 2x + 2x' = f(x) + f(x')$ risp. somma

$\underset{K}{\alpha \in \mathbb{R}}, \underset{V}{x \in \mathbb{R}}$ • $f(\alpha x) = 2(\alpha x) = 2 \cdot \alpha \cdot x = \alpha(2x) = \alpha f(x)$ risp. •

• $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$ <u>NO</u>

$f(x+x') = (x+x') + 1$

$f(x) + f(x') = x+1 + x'+1 = x + x' + 2$

- $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è $\mathbb{R}$-lineare
  $a+ib = z \longmapsto \bar{z} = a - ib$ Non è $\mathbb{C}$-lineare

  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ rispetta $+$

  $\alpha \in \mathbb{R}$ $\overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\,\bar{z} = \alpha \bar{z}$ rispetta $\cdot$

- Sia V uno sp. vettoriale su K con base $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{B}$

  $\alpha_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$

  $v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coord. di v risp. alla base $\mathcal{B}$

  è K-lineare.

- $\frac{d}{dx}: K[x] \longrightarrow K[x]$

  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \longmapsto a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$

  è K-lineare (esercizio!)

<u>Proprietà</u> di $f: V \longrightarrow W$ K-lineare

- $f(0_V) = 0_W$

  Infatti: $0_V = 0_K \cdot v$ con $v \in V$ qualsiasi

  $f(0_V) = f(0_K \cdot v) = 0_K \cdot f(v) = 0_W$

- $f(-v) = -f(v)$ $\forall v \in V$

  $f(-v) = f((-1)\cdot v) = (-1) f(v) = -f(v)$

<u>Osservazione</u> Siano $f: V \longrightarrow W$ e $g: W \longrightarrow Z$ K-lineari

Allora $g \circ f: V \longrightarrow Z$ è K-lineare

Infatti. $(g \circ f)(\alpha v + \beta v') = g(f(\alpha v + \beta v'))$

$\alpha, \beta \in K$, $v, v' \in V$

$\overset{f \text{ lineare}}{=} g(\underbrace{\alpha f(v) + \beta f(v')}_{\text{c.l. in } W})$

$\overset{g \text{ lineare}}{=} \alpha g(f(v)) + \beta g(f(v'))$

$= \alpha (g \circ f)(v) + \beta (g \circ f)(v')$

<u>Def</u> • $f: V \longrightarrow W$ K-lineare si dice <u>isomorfismo</u> se esiste una $g: W \longrightarrow V$ K-lineare t.c.

$g \circ f = id_V$ e $f \circ g = id_W$

• se f è isomorfismo e $V = W$ f si dice <u>automorfismo</u>

- se $f: V \longrightarrow W$ è K-lineare e $V = W$
  f si chiama anche <u>endomorfismo</u>

(automorfismo è un endomorfismo invertibile)

<u>Lemma</u> $f: V \longrightarrow W$ K-lineare è un isomorfismo $\Longleftrightarrow$ f è biettiva.

da dimostrare