Lezione 8 (3 novembre 2023)

Norme vettoriali e matriciali

$\|\cdot\|_1, \quad \|\cdot\|_\infty, \quad \|\cdot\|_2, \quad \|\cdot\|_p$ vettori

$\|\cdot\|_1, \quad \|\cdot\|_\infty, \quad \|\cdot\|_2, \quad \|\cdot\|_p, \quad \|\cdot\|_F$ matrici

FROBENIUS

NORME COMPATIBILI e NATURALI

Def Data una norma di matrice e una vettoriale diremo che esse sono COMPATIBILI o CONSISTENTI

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

NORMA NATURALE o INDOTTA

Ad ogni norma vettoriale possiamo associare una norma matriciale nel seguente modo

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Ne consegue che

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

$\Rightarrow$ una norma indotta o naturale è anche compatibile

ESEMPIO

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1$$

questo vale per le norme 1, 2, ∞ ovvero queste sono norme indotte dalle corrispondenti norme vettoriali

L'unica norma che non è naturale è quella di FROBENIUS. Infatti

$$\|I\|_F := \sqrt{tr\left(I \cdot I^T\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$$

PROPOSIZIONE

Per ogni norma compatibile si ha

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}$

Dim $v \neq 0$ autovettore

$$|\lambda|\,\|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\|\,\|v\|$$

$\|v\| \neq 0$ perché $v \neq 0$

allora

$$|\lambda| \leq \|A\| \qquad \lambda \text{ generico autovalore}$$

se applichiamo il max si conclude

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \leq \|A\| \qquad \#$$

$$Ax = b \qquad \begin{array}{ll} A & n \times n \\ x, b & n \times 1 \end{array}$$

Regola di Cramer

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$$A_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & \boxed{\; b \;} & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ i \end{array}$$

Calcolare $\det(A)$ con A $n \times n$

costa $O(n^3)$ operazioni moltiplicative (con Eliminazione di Gauss)

Ora per calcolare la soluzione di $Ax=b$ con Cramer, devo calcolare $n+1$ det.

Complessivamente risolvere un sistema lineare con Cramer richiede

$$(n+1)\,O(n^3) = O(n^4)$$

Se $n = 10^6 \implies (10^6)^4 = 10^{24}$ operaz.

$\implies$ si perde tempo!

CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA

$$Ax = b$$

Per studiare il condizionamento perturbiamo i dati del problema e cerchiamo di capire come queste perturbazioni si ripercuotono sulla soluzione

Dati: A, b Soluzione è x

(a) Perturbo $b + \delta b$

$$\hookrightarrow \quad A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$\cancel{Ax} + A\delta x = \cancel{b} + \delta b$$

$$A\,\delta x = \delta b$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|$$

Ora $\quad \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

$$\frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\| \, \|x\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|A\| \, \|x\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\text{errore rel. sulla soluzione}} \leq \underbrace{\|A\| \, \|A^{-1}\|}_{\text{NUMERO DI CONDIZIONAMENTO di } A} \underbrace{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}_{\text{errore relativo sul dato } b}$$

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO di A

$$K(A) := \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

$\left(\text{oppure } \nu(A), \mu(A) \right)$

$K(A)$ è quindi un fattore di amplificazione dell'errore e tanto maggiore sarà $K(A)$ tanto peggio condizionata sarà la matrice A

MATLAB

cond(A) è il numero di cond. in norma 2

cond(A, 1), cond(A, inf)

cond(A, 'fro')

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$$

(b) Perturbo sia A che b

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$$

In questa situazione

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{E_{rel,x}} \leq \frac{k(A)}{1 - k(A) \underbrace{\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}_{E_{rel,A}}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \underbrace{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}_{E_{rel,b}} \right)$$

Nel caso particolare in cui

$$\|\delta A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$$

nella formula precedente si ottiene

$$\frac{k(A)}{1 - k(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \leq 2\,k(A)$$

e quindi si semplificano i calcoli

$$E_{rel,x} \leq 2\,k(A)\left(E_{rel,A} + E_{rel,b}\right)$$

Conclusione : la soluzione di un sistema lineare dipende dal condizionamento di A

Due esempi

1) MATRICE di HILBERT

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & & 1/(n+1) \\ & & & & & \\ 1/n & - & - & - & & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad i,j = 1,\dots,n$$

E' simmetrica e definita positiva

MATLAB $\quad H = hilb(n) \quad n = 5$

$$K_2(H) \approx e^{\frac{7}{2}n}$$

Alcuni valori

n	2	6	10	20
$K_2(H)$	19.3	$1.5 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^{13}$	$2.1 \cdot 10^{18}$

2) MATRICE DI VANDERMONDE

$$P_n(x) = \underline{\underline{a_0}}\, x^n + \underline{\underline{a_1}}\, x^{n-1} + \dots + \underline{\underline{a_n}} \cdot 1$$

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, \dots, n}$$

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_n \cdot 1 = f(x_0) \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_n 1 = f(x_1) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_n \cdot 1 = f(x_n) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & - & - & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & - & - & 1 \\ & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & - & - & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$V = V(\underbrace{x_0, \dots, x_n}_{X})$ Vandermonde

$$V_{ij} = x_i^{n-j}$$

$$\det V = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

quindi se $x_i \neq x_j$ $\det V \neq 0$

Purtroppo V è molto mal condizionata

Alcune stime note $k_\infty(V)$

Sia $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ un insieme di nodi d'interpolazione

- Se $x_i > 0$ allora $k_\infty(V(X)) \geq (n-1)\, 2^{n-1}$
- Se i nodi sono simmetrici rispetto all'origine

$$k_\infty(V(X)) \geq (n-2)\, 2^{\frac{n-2}{2}} \quad n \text{ pari}$$

$$k_\infty(V(X)) \geq (n-3)\, 2^{\frac{n-3}{2}} \quad n \text{ dispari}$$

Gautschi e Inglese (2008)

MATLAB : `x=[ , - - ,]` `V= vander(x);`

Non resta che risolvere

$$Ax=b$$

- **METODI DIRETTI** : metodi di cui sappiamo a priori il numero di passi da fare per risolvere il sistema

  Esempio MEG (Metodo di Eliminazione di Gauss)

- **METODI ITERATIVI**

$$f(X) = Ax-b$$

$$\hookrightarrow \quad x^{(k+1)} = P\,x^{(k)} + q$$

$x^{(0)}$ è il vettore iniziale

P è matrice di iterazione

$Ax=b$ con MEG è equivalente

$$A = L \cdot U$$

$L=$ Lower $U=$ Upper

U altro non è che la matrice di arrivo con l'eliminazione di Gauss. Perché con Gauss

$$A = A^{(0)} \xrightarrow{n-1} A^{(n-1)} = U$$