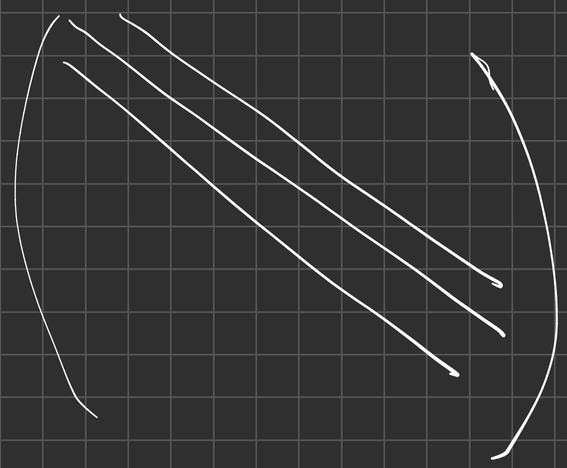
Lezione 7 (27 ottobre 2023)

$$Ax = b$$

Se A è tridiagonale

$A =$ 

In MATLAB conosciamo il comando

diag

Se x è vettore

$D = \text{diag}(x)$ con D matrice diagonale con diagonale x

Se A è una matrice

$d = \text{diag}(A)$

dove $d = (a_{ii},\ i = 1, \dots, n)$ ovvero il vettore che contiene gli elementi diagonali di A.

$S = \text{diag}(\text{diag}(A))$

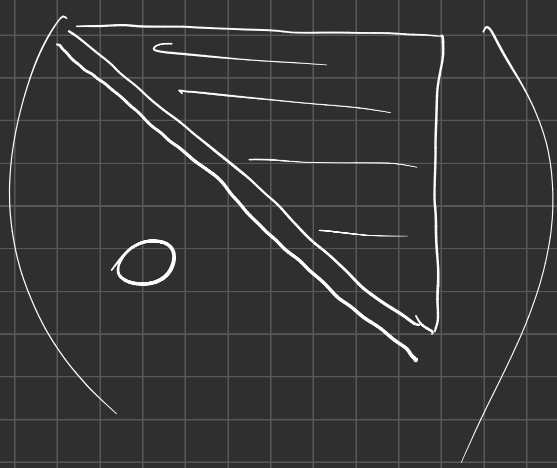
S è diagonale con diagonale $d = \text{diag}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

triu(A) restituisce la parte triangolare superiore

tril(A) triangolare inferiore

- Una matrice ha forma di HESSENBERG superiore se ha la forma

$H =$ 

- A la trasposta di A è A^T

  ma in MATLAB è A'

- $A^T = A \Rightarrow A$ è simmetrica

  $A^T = -A \Rightarrow A$ è antisimmetrica

- A simmetrica è <u>definita positiva</u> se $\forall\, x \neq 0$ la forma quadratica

$$x^T A x > 0$$

se vale $x^T A x \geq 0$ si dice semidefinita positiva

<u>Proposizione</u>

$A^T = A$ è def positiva   A è $n \times n$

- $|A_k| > 0$ $k = 1, \dots, n$ minori principali di testa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A_n| = \det(A)$$

- $a_{kk} > 0$ $\forall k$
- $|a_{ij}^2| < a_{ii}\, a_{jj}$ $i \neq j$
  (cioè l'elemento più grande sta sulla diagonale)
- gli autovalori sono positivi

Infatti

$$0 < x^T \underbrace{Ax}_{\lambda x} = x^T \lambda x = \lambda x^T x$$

$$x^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

essendo $x \neq 0 \implies x^T x > 0$

$$0 < \lambda x^T x \iff \lambda > 0$$

Attenzione: se $\det(A) > 0$ non è detto che A sia def +

Infatti $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Es $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5 \implies \det(A) > 0$

ma 1 autovalore è negativo.

Osservazione $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

In MATLAB

eig(A) autovalori

trace(A) traccia

= sum(diag(A))

somma degli autovalori

Norme vettoriali

$x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

che ha le seguenti proprietà

1) $\|x\| > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \|x\| = 0$ sse $x \equiv 0$

2) $\|cx\| = |c| \, \|x\| \quad \forall c \in \mathbb{R}$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
(disuguaglianza triangolare)

In uno spazio vettoriale di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti ovvero se $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$ esistono costanti m, M t.c.

$$m \|x\|^{(2)} \leq \|x\|^{(1)} \leq M \|x\|^{(2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esempi di norme vettoriali

(a) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (norma infinito)

(b) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (norma 1)

(c) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$

(norma 2 o euclidea)

(d) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ norma $p \geq 1$

In MATLAB

a = norm(x) è per default la norma 2

norm(x, *) $\hookrightarrow$ specificato 1, inf, 'p'

NORME MATRICIALI

$A = [a_1, \dots, a_n]$ a_i è vettore colonna

$a_i \in \mathbb{R}^n$

A è $n \times n$

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

1) $\|A\| > 0$ se $A \neq O_{n\times n}$

$\|A\| = 0$ sse $A = 0$

2) $\|cA\| = |c|\,\|A\|$ $\quad c \in \mathbb{R}$

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ $\quad \forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
(disug. triangolare)

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\|\,\|B\|$ $\quad \forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
(proprietà caratt. delle norme matriciali)

<u>Esempi</u>

1) $\|A\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (max per righe)

2) $\|A\|_1 := \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (max per colonne)

3) $\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^T A)}$

$\rho(A^T A)$ = autovalore di modulo massimo di $A^T A$ detto "<u>raggio spettrale</u>"

4) $$\|A\|_F := \sqrt{tr(A A^T)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Norma di FROBENIUS

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda_i| ,\quad i = 1, \dots, n \}$$

autovalore di modulo massimo

- Se $A = A^T$ (simmetrica)

$$\lambda(A^T A) = \lambda(A^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{controllare}}}{=} \lambda^2(A)$$

Quindi

$$\sqrt{\rho(A^T A)} \underset{\substack{\uparrow \\ A^T = A}}{=} \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A) = \|A\|_2$$

Provare usando MATLAB calcolare varie norme.