Vettori geometrici, spazi vettoriali e sottospazi

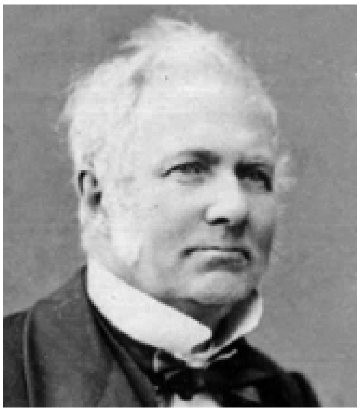
A. Bertapelle

ottobre 2023

Idea

Uno spazio vettoriale è un insieme di oggetti (detti *vettori*) che si possono sommare e moltiplicare per uno *scalare* (ossia un elemento di un campo: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$) e le operazioni $+, \cdot$ godono di certe proprietà.

Un po' di storia.



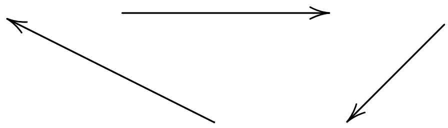
Giusto Bellavitis
(Bassano del Grappa 22/11/1803,
Tezze sul Brenta 6/11/1880)

Les développements et les applications de la méthode des équipollences, je les ai écrits en **1832** *chez celle qui depuis a été ma femme chérie, pendant quelle m'accompagnait travaillant ou chantant.* (Lettera a M. Laisant 28/6/1873)

Hamilton (1843), Grassmann (1844), ...

Definizione naïf di vettore

Un vettore geometrico è un "ente" dotato di direzione, lunghezza e verso.



Si considera poi il caso particolare del vettore nullo che non ha né direzione, né verso e lunghezza 0.

Segmenti orientati

Dati due punti distinti A e B, un *segmento orientato* (non banale) AB è segmento su cui siano fissati nell'ordine l'inizio A e la fine B.

$$A \longrightarrow B$$

Si ha $AB \neq BA$.

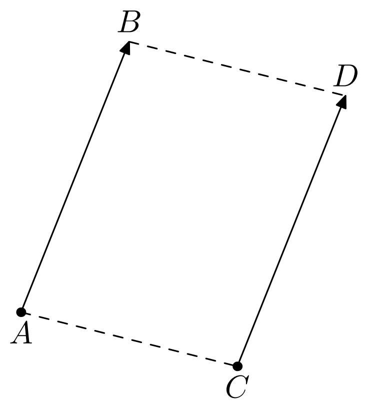
Un *segmento orientato banale* è del tipo AA (ossia un punto).

Segmenti equipollenti

Definizione

Due segmenti orientati non banali AB e CD si dicono **equipollenti** *se sono paralleli, di uguale lunghezza e orientati concordemente.*

Se distinti, essi sono equipollenti se e solo se $ABDC$ è un parallelogramma.



Tutti i segmenti orientati banali sono considerati tra loro equipollenti.

Un segmento orientato non banale non è equipollente ad alcun segmento orientato banale.

La relazione di equipollenza sull'insieme dei segmenti orientati è una relazione di equivalenza.

Vettori geometrici

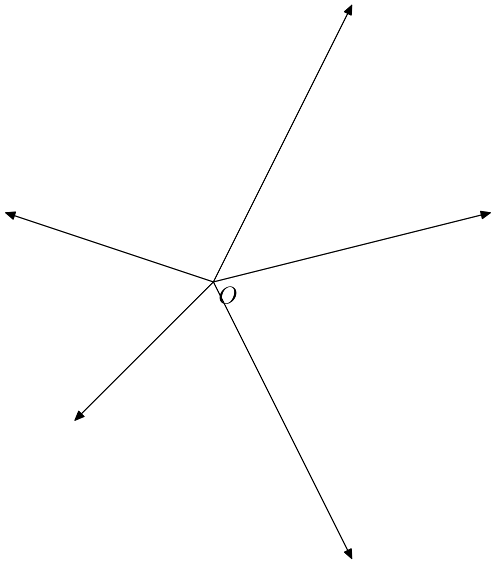
Definizione

Un **vettore geometrico** *è una classe di equipollenza di segmenti orientati. Preso un segmento orientato AB la sua classe di equipollenza viene indicata con $\vec{AB}$.*

Se AB è equipollente a CD allora $\vec{AB} = \vec{CD}$.

$\mathbf{0} = \vec{AA}$ indica il *vettore geometrico nullo*, con A un qualsiasi punto del piano.

Fissato un punto O un qualsiasi vettore geometrico è rappresentato da un (unico) segmento orientato avente punto iniziale in O.

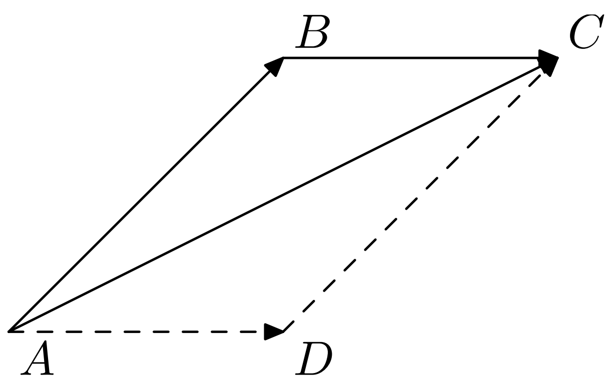


Sia $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori geometrici.

Somma di vettori geometrici

Definiamo

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \qquad (\vec{AB}, \vec{BC}) \mapsto \vec{AC}$$



Regola del parallelogramma: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ è associato alla diagonale del parallelogramma individuato dai segmenti AB e AD.

Se uno dei vettori è nullo si ha:

$$\vec{AB} + \mathbf{0} = \vec{AB} = \mathbf{0} + \vec{AB}$$

perché $\mathbf{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$.

Inoltre,

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \mathbf{0}.$$

Moltiplicazione per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \qquad (\alpha, \vec{AB}) \mapsto \alpha\vec{AB} = \vec{AC}$$

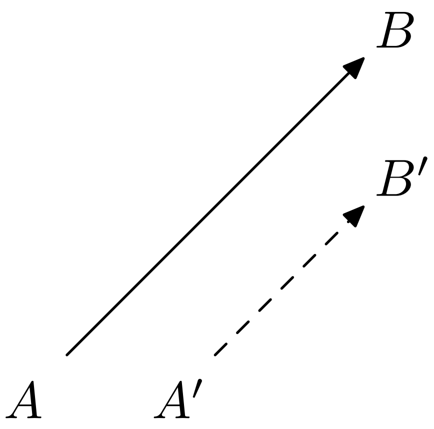
ove

- $C = A$ se $\alpha = 0$, ossia $0\vec{AB} = \mathbf{0}$,
- $C = A$ se $B = A$, ossia $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
- se $\alpha \neq 0$ e $\vec{AB} \neq \mathbf{0}$ i punti A, B, C sono allineati, vale

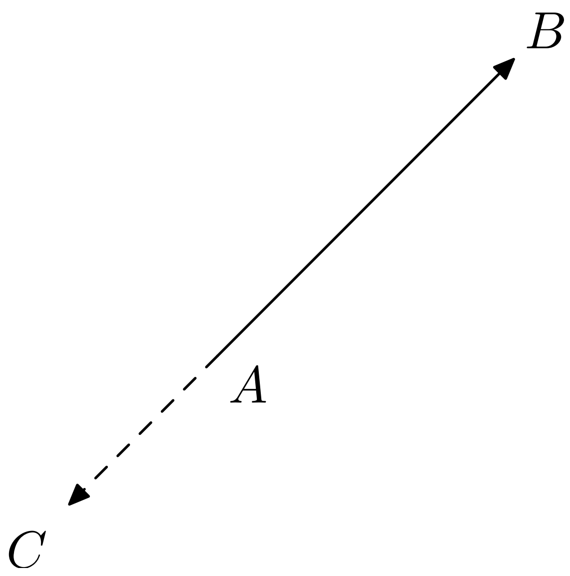
$$|\alpha| \cdot ||AB|| = ||AC||$$

  e il verso di $\vec{AC}$ è concorde a quello di $\vec{AB}$ se $\alpha > 0$, discorde altrimenti.

Esempio: $\alpha = 1/2$



Esempio: $\alpha = -1/3$



Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare

$(\mathcal{V}, +)$ è un gruppo commutativo ossia

S1) $(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD})$ (associatività)

S2) $\vec{AB} + \mathbf{0} = \vec{AB} = \mathbf{0} + \vec{AB}$ (esiste el. neutro)

S3) $\vec{AB} + \vec{BA} = \mathbf{0} = \vec{BA} + \vec{AB}$ (esiste el. opposto)

S4) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$ (commutatività)

e inoltre dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono

M1) $\alpha(\beta\vec{AB}) = (\alpha\beta)\vec{AB}$ (associatività)

M2) $(\alpha + \beta)\vec{AB} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AB}$ (distributività)

M3) $\alpha(\vec{AB} + \vec{CD}) = \alpha\vec{AB} + \alpha\vec{CD}$ (distributività)

M4) $1\vec{AB} = \vec{AB}$

Definizione di spazio vettoriale

Uno **spazio vettoriale** su un campo K (ad es. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) è un insieme V dotato di due operazioni

$$+\colon V\times V \to V,\ \ (v,w)\mapsto v+w \quad \text{e} \quad \cdot\colon K\times V \to V,\ \ (\alpha,v)\mapsto \alpha v$$

tali che $(V,+)$ sia un gruppo commutativo e inoltre valgono:

M1) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (associatività)

M2) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributività)

M3) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$ (distributività)

M4) $1v = v$

per ogni scelta di α, β in K e di v, w in V.

Gli elementi di uno spazio vettoriale vengono detti **vettori**, gli elementi di K sono detti **scalari**.

$\mathcal{V}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

L'insieme dei vettori geometrici $\mathcal{V}$ con le operazioni definite sopra è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ come spazio vettoriale

$\mathbb{C}$ è un gruppo commutativo rispetto alla $+$.

Considero $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ moltiplicazione di $\mathbb{C}$.

Soddisfa le proprietà M1)-M4).
Dunque $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su se stesso.

Se invece considero $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (\lambda, a + ib) \mapsto \lambda a + i\lambda b.$

Anche questa applicazione soddisfa le proprietà M1)-M4).
Dunque $\mathbb{C}$ è pure uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Spazio vettoriale nullo

Sia $\mathbf{0} = \{0\}$.

Si definiscono:

- $0 + 0 = 0$
- $\alpha \cdot 0 = 0$ per ogni $\alpha \in K$.

Con queste operazioni $\mathbf{0}$ è uno spazio vettoriale, detto **spazio vettoriale nullo**, sul campo K.

K^n

Ricordiamo che K^n, $n \geq 1$, indica il prodotto cartesiano di n copie di K.

Ad es.: $K^1 = K$, $K^2 = K \times K$, $K^3 = K \times K \times K$, ...

Per convenzione d'ora in poi scriveremo gli elementi di K^n in colonne.

$$n = 1 \quad (a), \qquad n = 2 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad n = 3 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{in generale: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},$$

con $a, a_i \in K$.

Operazioni sulle n-uple

$$+ : K^n \times K^n \longrightarrow K^n, \qquad \cdot : K \times K^n \longrightarrow K^n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \dots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

K^n è uno spazio vettoriale su K.

$K[x]$

Indichiamo con $K[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti nel campo K nell'indeterminata x. I suoi elementi sono del tipo

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

con gli $a_i \in K$. Se gli a_i sono tutti 0 il polinomio si dice nullo e lo si indica con 0.

Il **grado** di un polinomio non nullo $p(x) \in K[x]$ è il massimo indice j per cui $a_j \neq 0$. Ad esempio:

- 2 ha grado 0;
- $1 - x^3 + 3x^5$ ha grado 5;
- $3 - x^2 + 0x^4 + 0x^7$ ha grado 2.

Poniamo

$$\begin{aligned} +\colon K[x] \times K[x] &\to K[x], \\ (a_0 + \dots a_n x^n, b_0 + \cdots + b_m x^m) &\mapsto a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots \end{aligned}$$

l'usuale somma tra polinomi e

$$\begin{aligned} \cdot\colon K \times K[x] &\to K[x], \\ (\alpha, b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) &\mapsto \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \cdots + \alpha b_m x^m \end{aligned}$$

l'usuale prodotto di un polinomio per uno scalare.

$K[x]$ con le operazioni appena definite è uno spazio vettoriale su K.

Spazi vettoriali di funzioni

Sia A un insieme, K un campo e $\mathcal{F} = \{f : A \to K\}$ l'insieme di tutte le funzioni da A in K (come insiemi). Ad esempio posso prendere $A = \mathbb{N}$ o $A = K$.

Dati $f, g \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in K$ qualsiasi posso definire

$$f + g : A \to K, \quad a \mapsto f(a) + g(a)$$

$$\lambda f : A \to K, \quad a \mapsto \lambda(f(a))$$

Risulta che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale su K.

Campi finiti: un esempio

Sia $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ il campo dei numeri binari definito da

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \bullet & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Gli spazi vettoriali su $\mathbb{F}_2$ hanno applicazioni in teoria dei codici. In Algebra studierete i campi finiti $\mathbb{F}_p$ con $p \geq 2$ primo e più in generale $\mathbb{F}_{p^r}$.

Uno spazi vettoriale di sottoinsiemi

Sia E un insieme.

$\mathcal{P}(E) = \{X | X \subseteq E\}$ l'insieme delle parti di E è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$ con le operazioni

$$\triangle : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad (X, Y) \mapsto X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

$$\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \qquad 0 \cdot X = \emptyset, \qquad 1 \cdot X = X$$

Matrici

Definizione

Fissati due interi positivi m ed n, chiameremo **matrice** *di ordine $m \times n$ a elementi nel campo K, ogni tabella di scalari con m righe ed n colonne del tipo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}$$

ove $a_{ij} \in K$ indica l'elemento posto nella i-esima riga e nella j-esima colonna della tabella.
Una matrice si dice **quadrata** *se $m = n$.*

Esempi

Matrice nulla di ordine $n \times m$: $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Matrice identica di ordine $n \times n$:

$$\mathbf{1}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$.

Introduzione
Vettori geometrici
Spazi vettoriali
Sottospazi vettoriali
Definizione
Esempi

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$M_{m \times n}(K) = M_{m,n}(K)$ indica l'insieme delle matrici di ordine $m \times n$.

NB: possiamo identificare $M_{m \times 1}(K)$ con K^m.

A. Bertapelle Vettori geometrici, spazi vettoriali e sottospazi

Somma di matrici

$$+ : M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$M_{m\times n}(K)$ è un gruppo commuatativo con el. neutro la matrice nulla $\mathbf{0}$ e $-(a_{i,j}) = (-a_{ij})$.

Prodotto per uno scalare

$$\cdot : \ K \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si dimostra che $M_{m\times n}(K)$ delle matrici di ordine $m \times n$ dotato delle operazione di somma e di moltiplicazione per uno scalare appena definite è uno spazio vettoriale su K.

- L'insieme $\mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali positivi, è uno spazio vettoriale reale con le seguenti operazioni: la *somma* di x e y in $\mathbb{R}_{>0}$ è l'usuale prodotto di numeri reali, xy; e il *prodotto di* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *per uno scalare* $a \in \mathbb{R}$ è $x^a = \exp(a \log x)$.

Non esempio

L'insieme $\mathbb{R}^2$ *non* è uno spazio vettoriale se poniamo le operazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Valgono tutti gli assiomi, eccetto l'ultimo.
Infatti, se $y \neq 0$, abbiamo $1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Osservazioni

Sia V uno spazio vettoriale su K.

(a) Sia $0_K \in K$ e $v \in V$, allora $0_K v = 0_V$.

(b) Sia $0_V \in V$ e $c \in K$, allora $c0_V = 0_V$.

(c) Dato $v \in V$, l'opposto $-v \in V$ è unico e $-v = (-1)v$.

(a) Si ha $0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$. Sommando ai due membri dell'uguaglianza un vettore $-0_K v$, opposto di $0_K v$, si ricava l'uguaglianza $0_V = 0_K v + 0_V = 0_K v$.
(b) Si ha $c0_V = c(0_V + 0_V) = c0_V + c0_V$. Sommando ai due membri dell'uguaglianza un vettore $-c0_V$, opposto di $c0_V$, si ricava $0_V = c0_V + 0_V = c0_V$.
(c) vedi corso Algebra.

Si può vedere che la commutatività della somma è conseguenza degli altri assiomi che definiscono uno spazio vettoriale. Infatti, presi due vettori qualsiasi, u e v in V, si ha

$$v + u = -((-u) + (-v)) = (-1)((-u) + (-v)) = \\ = (-1)(-u) + (-1)(-v) = u + v.$$

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Presi comunque $v \in V$ e $c \in K$, si ha $cv = 0_V$ se, e solo se, $c = 0_K$ oppure $v = 0_V$.

dim. Abbiamo già visto che $cv = 0_V$ se uno dei due fattori è nullo. Viceversa, se $cv = 0_V$ e $c \neq 0_K$, allora esiste $c^{-1} \in K$ e

$$0_V = c^{-1}0_V = c^{-1}(cv) = (c^{-1}c)v = 1v = v.$$

Quindi, se $c \neq 0_K$, allora $v = 0_V$.

Sottospazi vettoriali

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se le restrizioni della somma e della restrizione per lo scalare di V a U rendono U uno spazio vettoriale.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se, e solo se, soddisfa a una delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti.

(I) Presi comunque u, u' in U e $a \in K$, i vettori $u + u'$ e au appartengono a U

(II) Presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K il vettore $a_1 u_1 + a_2 u_2$ appartiene a U.

(III) Presi comunque $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in U e $a_1, \ldots, a_n$ in K il vettore $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ appartiene a U.

Dobbiamo quindi verificare che le tre condizioni dell'enunciato sono equivalenti.