Matrici e riduzione di Gauss

A. Bertapelle
aa 2023/24

Università degli Studi di Padova

Definizione

Fissati due interi positivi m ed n, chiameremo **matrice** *di ordine $m \times n$, a elementi nel campo K, ogni tabella di scalari del tipo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}$$

ove a_{ij} indica l'elemento posto nella i-esima riga e nella j-esima colonna della tabella.

Somma di matrici

$$+ : M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

$$+ :\ K \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$M_{m\times n}(K)$ con $+$ e $\cdot$ appena definite è uno spazio vettoriale su K.

Sia $E(r, s)$ la matrice avente tutti coefficienti 0 tranne il coefficiente di posto r, s che è 1; ossia

$$E(r,s) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

ove $a_{rs} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $(i,j) \neq (r,s)$.

La **base canonica** di $M_{m\times n}(K)$ è data dalle matrici $E(r,s)$ al variare di $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq s \leq n$.

Pertanto $dim_K M_{m\times n}(K) = mn$.

Esempio

$M_{2\times 3}(K)$ ha dimensione $2 \cdot 3 = 6$ e la sua base canonica è

$$E(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; E(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; E(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; E(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate

Una matrice $m \times n$ si dice **quadrata** (di ordine n) se $m = n$.
Esempi:

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_n(K) := M_{n\times n}(K)$.

Matrici diagonali

Una matrice quadrata (a_{ij}) di ordine n si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Esempi:

$$\mathbf{0}, \ \mathbf{1}_n, \quad (2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici diagonali di ordine n fissato formano un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ di dimensione n.

Una sua base è data dalle matrici $E(i,i)$ per $1 \leq i \leq n$.

Matrici triangolari

Una matrice quadrata (a_{ij}) di ordine n si dice **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Dimostrare che le matrici triangolari superiori di ordine n formano un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$; determinarne una base e la dimensione.

Matrici triangolari

Una matrice quadrata (a_{ij}) di ordine n si dice **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici triangolari inferiori di ordine n formano un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

Prodotto di una matrice riga con una matrice colonna

Siano $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{1\times n}(K)$ e
$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n = M_{n\times 1}(K)$.

Il prodotto della matrice riga A con la matrice colonna B è lo scalare

$$p = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Prodotto di due matrici

Siano $A \in M_{m\times n}(K)$ e $B \in M_{n\times t}(C)$.

Il **prodotto righe per colonne** della matrice A con la matrice B è la matrice $m \times t$

$$AB = P = (p_{ij}) \qquad \text{ove}$$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1}, & \dots, & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} := a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

è il prodotto della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B.

Esempi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

poiché

$(3\ 1)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 6 - 2 = 4,$

$(3\ 1)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = -4$, ecc.

Proprietà del prodotto di matrici

Siano $A, A' \in M_{m \times n}(K)$, $B, B' \in M_{n \times t}(K)$, $D \in M_{t \times h}(K)$. Allora

- $A(B + B') = AB + AB'$,
- $(A + A')B = AB + A'B$,
- $(AB)D = A(BD)$,
- $A\mathbf{1}_n = A = \mathbf{1}_m A$.
- $A\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0}A$.

Le dimostreremo più avanti.

Attenzione: il prodotto BA non esiste se $m \neq t$.
Anche se $m = n = t$ si ha $AB \neq BA$ in generale.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0-1 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 2+0 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le uniche matrici che commutano con tutte le matrici quadrate di ordine n sono le matrici **scalari** di ordine n ossia le matrici del tipo $\lambda \mathbf{1}_n$ per un qualche $\lambda \in K$ (sono le matrici diagonali con λ sulla diagonale).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Vale $(\lambda \mathbf{1}_n)A = \lambda A = A(\lambda \mathbf{1}_n)$.

Matrici invertibili

Definizione

Una matrice A, quadrata di ordine n, si dice **invertibile** *se esiste una matrice quadrata B (sempre di ordine n) tale che $BA = AB = \mathbf{1}_n$; in tal caso, si scrive A^{-1} in luogo di B.*

La matrice nulla NON è invertibile.

La matrice identica $\mathbf{1}_n$ è invertibile e coincide con la propria inversa.

Una matrice scalare $\lambda\mathbf{1}_n$ è invertibile se e solo se $\lambda \neq 0$ e in tal caso $\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}_n$ è l'inversa.

Rango

Definizione

Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Si definisce **rango (per colonna)** *di A la dimensione del sottospazio di K^m generato dalle colonne di A.*

Si definisce **rango (per riga)** *di A la dimensione sottospazio di K^n generato dalle righe di A (viste come vettori di K^n).*

Dimostreremo che il rango per riga e il rango per colonna coincidono e vengono indicati con $\operatorname{rk} A$.

Matrice a scala

Definizione

Una matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(C)$ si dice **in forma a scala (per righe)** *se per ogni riga r, se a_{r,j_r} è il primo elemento non nullo della riga r-esima, allora tutti i coefficienti a sinistra e in basso rispetto al termine a_{r,j_r} sono nulli (ossia, $a_{i,j} = 0$ ogni volta che $i \geq r$ e $j \leq j_r$, a parte il caso $i = r$ e $j = j_r$). I primi termini non nulli (da sinistra) di ciascuna riga si dicono* **pivot** *o* **termini direttori** *della matrice a scala.*

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Matrice a scala speciale

Definizione

Una matrice si dice in **forma speciale a scala (per righe)** *se è in forma a scala e tutti i pivot sono uguali a 1.*
Una matrice si dice in **forma a scala ridotta** *se è in forma speciale e ogni pivot è l'unico elemento non nullo della sua colonna.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prime due sono speciali, la terza è anche ridotta.

Osservazione

Il rango per riga di una matrice a scala è dato dal numero delle righe non nulle, ossia dal numero dei pivot.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad dim_K \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3$$

Operazioni elementari sulle riga di una matrice

Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. Si considerino le seguenti operazioni:

i) moltiplicazione di tutti i coefficienti di una riga per una costante $\alpha \in K$ diversa da zero;

ii) scambio di due righe;

iii) sostituzione di una riga con la somma della stessa con un multiplo di una riga che la precede.

iii') sostituzione di una riga con la somma della stessa con un multiplo di un'altra riga.

Algoritmo di Gauss

È la dimostrazione costruttiva della seguente affermazione:

Teorema

Tramite operazioni elementari sulle righe di tipo ii) e iii) ogni matrice può essere ridotta in forma a scala (per righe); usando anche operazioni elementari di tipo i) ogni matrice può essere trasformata in una matrice a scala speciale e poi usando operazioni di tipo iii') in una a scala ridotta.

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice A non cambiano il rango per riga. Dunque per calcolare il rango per riga di una matrice si applica l'algoritmo di Gauss producendo una matrice a scala e si contano i pivot.