Coordinate ed equazioni

Alessandra Bertapelle

a.a. 2023-2024

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una *base* di V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano V.

Alcuni spazi vettoriali ammettono basi canoniche, ma i loro sottospazi, in genere, non hanno basi canoniche.

Teorema (struttura degli spazi vettoriali)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K. Allora

(a) Esiste almeno una base per V.

(b) Due basi di V hanno la stessa cardinalità, ossia possono essere messe in corrispondenza biunivoca.

Per dimostrarlo abbiamo usato:

Lemma di Scambio (Steiniz)

Siano $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un insieme di generatori di V e $\{w_1, \ldots, w_k\}$ un insieme di vettori di V linearmente indipendenti. Allora $k \leq n$.

$V = \{0\}$ non ammette base e ha dimensione 0.

Corollario

Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione $n > 0$ finita.

(i) Ogni insieme di generatori di V formato da n vettori è una base di V.

(ii) Ogni sottoinsieme di V formato da n vettori linearmente indipendenti è una base di V.

(iii) Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di V può essere completato ad una base di V; in particolare ha al più n elementi.

(iv) Ogni insieme di generatori di V contiene almeno una base di V, in particolare ha almeno n elementi.

(v) Se W è un sottospazio di V allora $\dim W \leq \dim V$ e vale l'uguaglianza se e solo se $W = V$.

Dimostrazione per esercizio!

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale su K e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base (ordinata) di V. Allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base.

Dato il vettore $v \in V$, chiamiamo *coordinate di* v *nella base* $\mathcal{V}$ la colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ tale che $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Un vettore $x \in K^n$ coincide con le proprie coordinate rispetto alla base canonica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ha una biiezione

$$\alpha_{\mathcal{V}}^{-1} \colon K^n \to V, \qquad \alpha_{\mathcal{V}}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

L'inversa $\alpha_{\mathcal{V}} \colon V \to K^n$ associa ad un vettore v le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{V}$.
Le operazioni sulle coordinate si trasformano nelle operazioni dello spazio vettoriale V, ossia

$$\alpha_{\mathcal{V}}(v + w) = \alpha_{\mathcal{V}}(v) + \alpha_{\mathcal{V}}(w),$$

$$\alpha_{\mathcal{V}}(cv) = c\alpha_{\mathcal{V}}(v),$$

per ogni $v, w \in V, c \in K$.

Le soluzioni di un'eq. lineare omogenea $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ in n coordinate formano un sottospazio vettoriale di K^n.

Più in generale, le soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee in n indeterminate formano un sottospazio di K^n.
Esempio :

$$U = \mathrm{Sol}\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases} = \mathrm{Sol}\begin{cases} x_3 = 3x_1 + 5x_2 \\ x_4 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} .$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 3a_1+5a_2 \\ 2a_1-3a_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 3a_1+5a_2 \\ 2a_1-3a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Metodo di eliminazione dei parametri

Viceversa, ogni sottospazio di K^n è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (non unico in generale).

Esempio : Considero $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \iff \begin{cases} x_1 = 2a \\ x_2 = -a + b \\ x_3 = -3b \\ x_4 = 3a + 2b \end{cases} , \quad \text{dunque} \quad \begin{cases} a = \frac{x_1}{2} \\ x_2 = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{3} \\ b = -\frac{x_3}{3} \\ x_4 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 9x_1 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$ è un sistema di eq. cartesiane per U.

Esempio: Sia $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \iff \begin{cases} x_1 = a + 2c \\ x_2 = 2a + 3b + c \\ x_3 = -b + c \\ x_4 = 3a + 2b + 4c \end{cases} \quad \text{e si ha} \begin{cases} a = x_1 - 2c \\ x_2 = 2x_1 - 3x_3 \\ b = -x_3 + c \\ x_4 = 3x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

Le equazioni in rosso non contengono più i parametri a, b, c, e quindi $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ è un sistema di equazioni cartesiane che definisce U.

Riassumendo, fissato un sottospazio e una sua base, ad esempio,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

possiamo descrivere i vettori di U come i vettori le cui coordinate (rispetto alla base canonica) si scrivono come

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 3a - b \\ x_3 = -2a - 5b \\ x_4 = b \end{cases} \quad \text{con} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;$$

Equazioni parametriche

oppure come le soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Equazioni cartesiane

ottenute eliminando i parametri.

Cosa succede se consideriamo sottospazi di spazi vettoriali standard (ossia del tipo K^n) e una base $\mathcal{V}$ non canonica di K^n?
E se consideriamo sottospazi di spazi vettoriali non standard?

Dimostreremo che la biiezione $\alpha_{\mathcal{V}} \colon V \to K^n$ induce una biiezione tra sottospazi:

dato $U \leq V$ *esiste un unico sottospazio* $W \leq K^n$ *t.c.* $\alpha_{\mathcal{V}}(U) = W$.

Chiameremo *equazioni cartesiane* (risp. *parametriche*) di U rispetto alla base $\mathcal{V}$ le equazioni cartesiane (risp. parametriche) di W.

Riassunto
Equazioni parametriche e cartesiane
Operazioni elementari sui vettori (Gauss)
In K^n, rispetto alla base canonica
In V rispetto a una base generica

Esempio : Sia $U = \langle 2 + x, 1 - x^2 \rangle$ sottospazio di $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e consideriamo la base canonica $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ di V.

Allora $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$ ha eq. param. $\begin{cases} x_1 = 2a + b \\ x_2 = a \\ x_3 = -b \end{cases}$

ed eq. cartesiana $x_1 = 2x_2 - x_3$, ossia $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

E queste sono pure le equazioni di U rispetto alle basi scelte.

Esempio: Sia $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e consideriamo la base $\mathcal{V} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ di V.

Allora $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$ ha eq. param. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -a \\ x_3 = 0 \end{cases}$

ed eq. cartesiane $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

E queste sono pure le equazioni di U rispetto alle basi scelte.

Dati vettori $v_1, \dots, v_n$ (in ordine), possiamo

- scambiare di posto due dei vettori $v_1, \dots, v_n$;
- moltiplicare uno dei vettori $v_1, \dots, v_n$ per uno scalare $c \neq 0$;
- sostituire v_i con $v_i + av_j$ per un qualche indice $j \neq i$ e $a \in K$.

È immediato verificare (esercizio!) che, se i vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V (risp. sono linearmente indipendenti), applicando operazioni elementari a $v_1, \dots, v_n$ si ottengono ancora generatori di V (risp. vettori linearmente indipendenti).

Utilità: applicando operazioni elementari posso riconoscere se dei vettori dati generano lo spazio vettoriale e/o sono linearmente indipendenti.