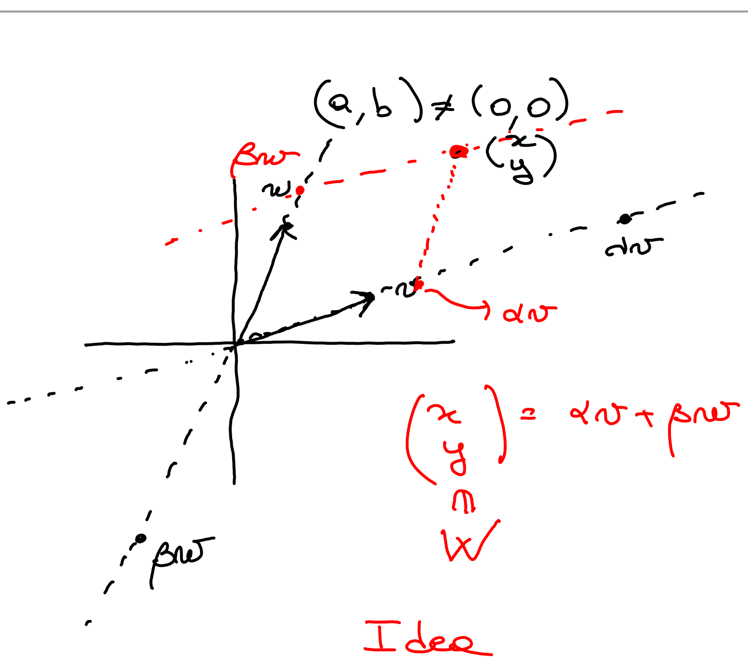
Geo 1 - mod A - Lez 9 - 18 ottobre 2023

Note Title

$$0 < \langle \overset{v \neq 0}{\binom{a}{b}} \rangle < W \overset{?}{\underset{=}{<}} \mathbb{R}^2$$

$$U = \left\{ \binom{\lambda a}{\lambda b},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Sia $\overset{w}{\binom{c}{d}} \in W$, $\binom{c}{d} \notin U$



voglio mostrare che $W = \mathbb{R}^2$

$\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ qualsiasi. Devo mostrare che $\binom{x}{y} \in W$

Basta vedere che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\binom{x}{y} = \underbrace{\alpha \overset{U \subseteq W}{v} + \beta \overset{W}{w}}_{\in W} = \alpha \binom{a}{b} + \beta \binom{c}{d} = \binom{\alpha a + \beta c}{\alpha b + \beta d}$$

$$\begin{cases} \alpha a + \beta c = x \\ \alpha b + \beta d = y \end{cases}$$ è sistema di 2 eq. in 2 incognite α, β

Osservo $\binom{c}{d} \notin \underset{\ni \binom{0}{0}}{U}$ per ipotesi $\binom{c}{d}$ non è del tipo $\binom{\lambda a}{\lambda b}$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

ossia $ad - bc \neq 0$

Infatti se fosse $\binom{c}{d} = \binom{\lambda a}{\lambda b}$ $\begin{cases} \lambda a = c \\ \lambda b = d \end{cases}$

Noto che $\binom{c}{d} \neq \binom{0}{0}$ $<$ $c \neq 0$ oppure $d \neq 0$ $\Rightarrow \lambda \neq 0$

Se $c \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ $\quad \lambda = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} b = d \Rightarrow cb = da \Leftrightarrow ad - bc = 0$

Se $d \neq 0$ analogo...

Torno al sistema e so che $ad-bc\neq 0$

$$\begin{cases}\alpha a+\beta c = x\\ \alpha b+\beta d = y\end{cases}$$

ammette unica soluzione (ad es. Cramer)

oppure lo verifico "a mano"

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ Suppongo sia $a\neq 0$ 1ª $\boxed{\alpha=\frac{x-\beta c}{a}}$

sostituisco nella 2ª: $\frac{bx-b\beta c}{\cancel{a}}+\beta d a = y a$

$\beta(ad-bc) = ay-bx \Rightarrow \beta = \boxed{\frac{ay-bx}{ad-bc}}$

$$\boxed{\alpha = \frac{x}{a}-\frac{c}{a}\cdot\frac{ay-bx}{ad-bc}}$$

ho trovato le 2 soluz.

Es: Fatevi esempio con $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$ad-bc=?\neq 0$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\alpha=?$ $\beta=?$

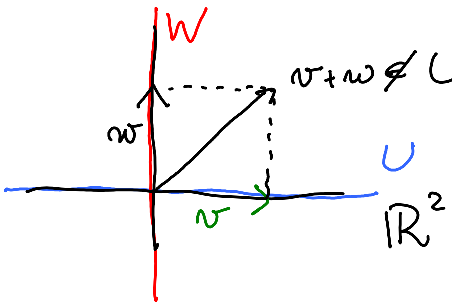
ad es $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=?\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}+?\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

In $\mathbb{R}^3$: $0\subsetneq \underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\rangle}_{U}\subsetneq\left\{\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}\subsetneq\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\notin U$

Domanda Se $U, W\leq V$ con V K-sp. vettoriale

$U\cup W$ è sottosp. di V?



$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$

$W=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}, b\in\mathbb{R}\right\}$

$U\cup W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}, xy=0\right\}$

Dunque l'unione in generale non è sottosp.

Ad es: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin U\cup W$

Lemma Siano $U, W \leq V$ con V K-sp. vettoriale

allora $U \cup W \leq V \iff U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$

Dim $\Leftarrow$) Se $U \subseteq W$ $\quad U \cup W = W \leq V$

Se $W \subseteq U$ $\quad$ analogo $= U \leq V$

$\Rightarrow$) Suppongo che $U \cup W \leq V$

e suppongo che $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$

voglio trovare assurdo.

sia $u \in U$ con $u \notin W$

sia $w \in W$ " $w \notin U$

Ora $u + w \in U \cup W$ perché $u \in U \subseteq U \cup W$

$w \in W \subseteq U \cup W$

e $U \cup W$ è sottospazio per ipotesi.

se $u + w \in U \cup W \Rightarrow \begin{cases} u+w \in U \\ u+w \in W \end{cases}$

se $u + w \in U \Rightarrow u + w = u'$ con $u' \in U \Rightarrow w = u' - u \in U$ ↯

se $u + w \in W \Rightarrow u + w = w'$ con $w' \in W \Rightarrow u = w' - w \in W$ ↯

$\blacksquare$

Sia S un sottoinsieme di V (K-sp.v.)

Indico con

$$\langle S \rangle := \text{il più piccolo sottospazio di } V \text{ che contiene } S$$

viene detto sottospazio generato da S.

$$= \bigcap_{\substack{W \leq V \\ S \subseteq W}} W \quad \text{intersezione di tutti i sottosp. che contengono } S.$$

Ad es.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V = \mathbb{R}^2 \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

(Ci interesserà lavorare con il sottospazio

$$U + W := \langle U \cup W \rangle \qquad U, W \leq V$$
)

Lemma Sia $S \subseteq V$. Allora

$$\langle S \rangle = \{ \text{combinazioni lineari a coeff. in } K \text{ di vettori di } S \} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \text{ al variare di } n \in \mathbb{N},\ a_i \in K,\ s_i \in S \right\}$$

Dim Chiamo J l'insieme di destra.

Dimostro la doppia inclusione $\langle S \rangle \subseteq J$, $\langle S \rangle \supseteq J$

$\subseteq$ Basta vedere che J è un sottospazio di V e che $\underbrace{S \subseteq J}_{\text{banale: se } s \in S \quad \overset{a_1}{1} \cdot \overset{s_1}{s} = s \in J}$ ($\uparrow$ c. l.)

$J \leq V$ perché chiuso risp. alla $+$ e al prodotto p. scalari

$\sum_{i=1}^{n} a_i s_i + \sum_{j=1}^{m} b_j s'_j$ è ancora comb. l.

$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) s_i$ è ancora c. l.

$\supseteq$ Basta mostrare che se W è sottosp. di V e $S \subseteq W \Rightarrow J \subseteq W$ (allora $J \subseteq \bigcap_{\substack{W \leq V \\ S \subseteq W}} W = \langle S \rangle$)

W è sottosp $\Rightarrow$ contiene tutte le c. l. dei suoi vettori (III criterio) in particolare dei vettori di S e dunque contiene J

$\blacksquare$