Geo 1 - mod A - Lez 8 - 17/10/2023

Def Sia V uno sp. v. su K (brevemente K-s.v.).
Una combinazione lineare (c.l.) di vettori di V a coeff in K è una somma finita del tipo
$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$
con $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in K$ $\forall i$, $v_i \in V$ $\forall i$

NB $\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n$ sono vettori di V e dunque $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 5$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 8$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \underbrace{5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} = \underbrace{2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{1\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se, e solo se, soddisfa a una delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti.

(I) Presi comunque u, u' in U e $a \in K$, i vettori $u + u'$ e au appartengono a U

(II) Presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K il vettore $a_1 u_1 + a_2 u_2$ appartiene a U.

(III) Presi comunque $u_1, u_2, \dots, u_n$ in U e $a_1, \dots, a_n$ in K il vettore $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ appartiene a U.

II) Dice che U è chiuso per comb. lineari di lunghezza 2

III) " " U " " " " " arbitraria

Abbiamo visto ieri che $\underset{\phi^{\#}}{U}$ è sottosp $\iff$ vale I)

Basta dunque dimostrare che $U \subseteq V$ soddisfa I) $\iff$ soddisfa II) $\iff$ soddisfa III)

Mostriamo che I) $\iff$ II)

I) $\Rightarrow$ II): ① $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$ ② $u \in U$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U$ } ipotesi

Siano ora $u_1, u_2 \in U$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ qualsiasi

$\alpha_1 u_1 \in U$ per ②

$\alpha_2 u_2 \in U$ " "

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$ per ①

[α_i al posto di a_i]

II) $\Rightarrow$ I) Ipotesi: $a_1 u_1 + a_2 u_2 \in U$ se $u_i \in U$ e $a_i \in K$

prendo $u_1, u_2 \in U$ qualsiasi

- $u_1 + u_2 \in U$ perché è c. l. con $a_1 = a_2 = 1$

- siano $u \in U$ e $a \in K$

$au = au + 1\underset{\underset{0_U}{\parallel}}{0_V} \in U$ con $u_1 = u$ $u_2 = 0_V$, $a_1 = a$ e $a_2 = 1$

III) $\iff$ I)

Suggerimento: per induzione:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i\right)}_{\in U} + \underset{\in U}{a_n u_n}$$

Passo base $n=1$ $au \in U$?

<u>Esercizio</u> . Siano $V = K[x]$ e $U = \{$ polinomi in $K[x]$ che si annullano in 2 $\}$
$(K = \mathbb{R})$

$x-2 \in U$
x^2-4

Verificare che U è sottosp. di V (controllo $0 \in U$)
$\cancel{3}$

Per il I criterio verifico che
① se $p(x), q(x) \in U \Rightarrow p+q \in U$ ✓
② se $p \in U$, $a \in K \Rightarrow ap \in U$ ✓

① Siano $p(x), q(x) \in U$ ossia $p(2)=0$ $q(2)=0$

$$(p(x)+q(x))(2) = p(2)+q(2) = 0+0 = 0$$
calcolato in 2

② $p(2)=0$ $\quad (ap(x))(2) = a\,p(2) = a \cdot 0 = 0$

Esercizio: verificarlo col II criterio ossia
verificare che $\alpha p + \beta q \in U$ se $\alpha, \beta \in K$
$p, q \in U$

Nascita di sottospazi: esempio

$2x-3y=0$ Sia $r \subseteq \mathbb{R}^2$ dato dalle coppie
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $2x-3y=0$

r è sottospazio di $\mathbb{R}^2$

se $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in r$ $\quad \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} r$ <u>sì</u>

$$2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2) = \underbrace{2x_1-3y_1}+2x_2-3y_2 = 0+0=0$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} r$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} r$ <u>sì</u>

$$2(\alpha x_1)-3(\alpha y_1) = 2\alpha x_1 - 3\alpha y_1 = \alpha(2x_1-3y_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

<u>Osservo</u>: ho una equazione $2x-3y=0$. Le soluzioni di questa eq. in $\mathbb{R}^2$ formano un sottospazio vettoriale.

<u>Esercizio</u> Mostrare che data comunque una equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$ (lineare omogenea)

le sue soluzioni in K^n formano un sottosp. vettoriale di K^n

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ t.c. } a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = 0 \right\}$$

NB non ho un sottospazio se considero

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad \text{con } b \in K^*$$

Infatti: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$ non è soluzione e

dunque l'insieme delle soluz. non contiene il vettore nullo di K^n e dunque non può essere sottosp.

<u>Svolgimento</u> siano $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ soluzioni dell'eq.

Dunque. $\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i = 0 = \sum_{i=1}^{m} a_i\beta_i$. $\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$ è soluzione?

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(\alpha_i+\beta_i) \underset{\substack{\text{prop.} \\ \text{commut. e} \\ \text{distributiva}}}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\beta_i\right) = 0+0 = 0$$

Analogamente $\lambda \in K$ $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$ è soluzione

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(\lambda\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i\alpha_i) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i = \lambda 0 = 0$$

$\boxdot$

Conclusione Le soluzioni di una equaz. lineare omog. in n indeterminate dà un sottosp. vett. di K^n.

Lemma Sia V un K-spazio vettoriale e siano W_1, W_2 sottosp. di V. Allora $W_1 \cap W_2 \leq V$.

Dim Siano $v_1, v_2 \in W_1 \cap W_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \overset{?}{\in} W_1 \cap W_2$ se sì concludo per il II criterio

$v_1 \in W_1 \cap W_2 \implies v_1 \in W_1$ e $v_1 \in W_2$

$v_2 \in W_1 \cap W_2 \implies v_2 \in W_1$ e $v_2 \in W_2$

$\Downarrow$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_1$ perché W_1 è sottosp.

$\Downarrow$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_2$

Dunque $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W_1 \cap W_2$

Più in generale

Lemma: Sia $\{W_j\}_{j \in J}$ (può essere insieme qualsiasi) una famiglia di sottospazi di un K-s.v. V

Allora $\bigcap_{j \in J} W_j$ è un sottospazio di V.

Provare a scrivere per bene la dimostrazione!

Definizione

Un sistema di m equazioni lineari (o brevemente **sistema lineare***) nelle n incognite* $x_1, \dots, x_n$*, a coefficienti nel campo* K*, è una scrittura del tipo*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ove i **coefficienti** a_{ij} *e i* **termini noti** b_i, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ *sono elementi di* K*.*

Con **soluzione** del sistema lineare

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si intende una n-upla $(\alpha_i) \in K^n$ tale che sostituendo ordinatamente gli scalari α_i alle incognite x_i nelle equazioni del sistema S si ottengano delle identità.

Ossia $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ è soluzione di tutte le eq. del sistema

Dato un sistema lineare $\underbrace{\text{omogeneo}}_{i\ b_i = 0}$ $\begin{cases} a_{11}x_1 \dots \dots = 0 \\ \vdots \qquad\qquad = 0 \\ \vdots \qquad\qquad = 0 \end{cases}$

allora le sue soluzioni formano un sottosp. vett. di K^n

Infatti: se $W_1 \leq K^n$ è il sottosp delle soluzioni della 1ª eq, $W_2 \leq K^n$ - - - - - - - 2ª .. e così via abbiamo che le soluzioni del sistema è dato dall'insieme $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n \leq V$ che è un sottospazio per quanto dimostrato prima.

$\rightsquigarrow$

- $\mathbb{R} = V$ $\qquad 0 = \{0\} \leq \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \leq \mathbb{R}$

NB in V c'è sempre è sottosp. 0 e tutto V come sottosp. banali

ce ne sono altri?

$$0 \underset{\neq}{\leq} \underset{\substack{\Psi \\ a \neq 0}}{U} \leq \mathbb{R}$$

sottosp. $a \neq 0$

Sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi $x \overset{?}{=} \lambda a \in U$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$$= \left(\frac{x}{a}\right) \cdot a, \quad \frac{x}{a} \in \mathbb{R}$$

Dunque $\mathbb{R} \subseteq U$

Gli unici sottospazi di $\mathbb{R}$ sono 0, $\mathbb{R}$.

- $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$$0 \leq \qquad\qquad \leq \mathbb{R}^2$$

$U = \{$ soluzioni $\alpha x - \beta y = 0$ con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)\}$

eq. non banale

(se ho $\alpha = \beta = 0$ $\quad U = \mathbb{R}^2$)

$$U \ni \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad U \ni \lambda \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\beta \\ \lambda\alpha \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

le soluzioni di $\alpha x - \beta y = 0$ sono tutte e sole del tipo $\begin{pmatrix} \lambda\beta \\ \lambda\alpha \end{pmatrix}$ Esercizio

$$0 \subset \left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle \subset ? \subseteq \mathbb{R}^2$$

?

può esserci un sottospazio?

$$\left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle \underset{\neq}{\leq} W \underset{\neq}{\leq} \mathbb{R}^2$$