Geo 1 - mod A - Lez 7 - 16/10/2023

Note Title

- Sia V uno spazio vettoriale sul campo K con $+, \cdot$ le operazioni.

  Se $W = V \setminus \{0\}$ con $+$ e $\cdot$ indotte da V
  ↑ vettore nullo

  non ho speranza che sia sp. vettoriale

  W non è gruppo commutativo risp. alla $+$
  abeliano ← Abel

- $\mathbb{R}$ è sp. vettoriale su se stesso.

  $\mathbb{R} \supseteq$ ~~$[0,1]$~~

  ~~$[-1,1]$~~ non funzione

  $\mathbb{Z}$ è commutativo risp. $+$

  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \dashrightarrow$ ✗ non riesco!

  Non è facile trovare sp. vett.

Cerchiamo sp. vettoriali "dentro" altri spazi vettoriali

V sp. vett. su K

$\cup$|

U sp. vett. su K con $+$ e $\cdot$ ereditati da V

$+: V \times V \longrightarrow V$ $\qquad$ $+: U \times U \longrightarrow U$

$(u_1, u_2) \longmapsto u_1 + u_2$

$\cdot\; K \times V \longrightarrow V$ $\qquad$ $\cdot\; K \times U \longrightarrow U$

$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$

Def Un sottoinsieme $U \neq \emptyset$ di uno sp. v. su K V si dice <u>sottospazio vettoriale</u> di V e scriveremo $U \leq V$ se U è uno sp. vettoriale con la $+$ e $\cdot$ ereditate da V.

<u>Lemma</u> $U \subseteq V$ è un sottospazio se e solo se

① $u+u' \in U \quad \forall\, u,u' \in U$ (ossia U è chiuso risp. alla $+$)

② $\lambda u \in U \quad \forall\, \lambda \in K,\ \forall u \in U$ (ossia U è chiuso per la $\cdot$ per lo scalare)

NB In particolare se U è sottospazio $\Rightarrow 0 \in U$

Dim $\Rightarrow$) banale

$\Leftarrow$) Suppongo $U \subseteq V$ e $+, \cdot$ soddisfino ①, ②

Mostriamo che U è sp. vettoriale su K risp. a $+, \cdot$

S1) S2) S3) S4)

S1) ↳ $u+u' = u'+u$ è vera in V e dunque in U

S2) ↳ Esiste elemento neutro in U?

Noto che ② $0 \cdot u = 0 \in U$ (0: vettore nullo di V)

Dunque il vettore nullo appartiene a U

e $u'+0 = u'$ in V e dunque in U

S3) da ② $u \in U$ $\quad (-1)u \in U$

$(-1)u = -u$ è l'opposto..

S4) discende dal fatto che l'associatività vale in V

Analogamente M1) M2) M3) M4) valgono facendole discendere dal fatto che valgono in V.

Ricorda • Se $0 \in K$ $\quad v \in V$ (sp. vett.) allora $0 \cdot v = 0$ (vettore nullo)

$$v + 0 \cdot v \underset{\text{distrib.}}{=} (1+0)v = v$$

$\Rightarrow$ sommando $-v$ ad entrambi i membri trovo che $0 \cdot v = 0$

• $(-1)\cdot v = -v \qquad v + (-1)v = (1-1)v = 0 \cdot v = 0$ (vettore)

$\Rightarrow (-1)v$ è l'opposto

Verificare se $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ è sottosp. vettoriale per la strutt. di $\mathbb{C}$-sp. vett. (e poi per quella di $\mathbb{R}$-sp.)

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad P = \{(a,b) \mid b = a^2\}$ è sottosp. vett.?

- $r_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad r_1 = \{(\cancel{x},y) \mid 3x - y = 0\}$ "

$r_2 = \{(x,y) \mid 2x + y = 1\}$ "