Geo 1 - mod A - Lez 16 - 07/11/2023 parte 1

Note Title

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ $\qquad rg_{rigo} A$ = dim sottosp. di K^n generato dalle righe di A

$A = (C_1, C_2, \dots C_n)$ ← le colonne di A $\qquad rg_{col.} A = \dim \langle C_1, \dots, C_n \rangle$ come sottospazio di K^m

Fino ad ora so che

$A \rightsquigarrow A'$ con op. elementari sulle righe

$rg_{rigo} A = rg_{rigo} A'$

Inoltre anche $rg_{col} A = rg_{col} A'$ $\qquad A' = (C_1', \dots C_n')$

<u>Dim</u> Sia S il sistema $Ax = 0$

sia S' - - - - $A'x = 0$

sono equivalenti ossia hanno le stesse soluzioni

Ricordo che $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ sono soluz. di $Ax = 0 \iff \underbrace{x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0}_{\text{comb. l. delle colonne } C_i \text{ con coeff. } x_i}$

S' ha le stesse soluz. di S dunque

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0 \iff x_1 C_1' + \dots + x_n C_n' = 0$$

- In particolare $C_1 \dots C_n$ sono l. indip ($rg_{col} A = n$)

$\iff C_1' \dots C_n'$ - - - - - ($rg_{col} A' = n$)

- Inoltre $C_j \in \langle C_1, \dots, \underset{\text{tolto}}{\widehat{C_j}}, \dots C_n \rangle \iff$

$C_j' \in \langle C_1', \dots, \widehat{C_j'}, \dots C_n' \rangle$

Dunque se $C_{i_1}, \dots C_{i_r}$ sono r colonne l. indip. che generano lo spazio $\langle C_1, \dots, C_n \rangle$ (che quindi ha dim r) allora $C_{i_1}', \dots, C_{i_r}'$ sono r col. l. indip che generano $\langle C_1', \dots, C_n' \rangle$

Dunque $\underset{\underset{rg_{col} A'}{\shortparallel}}{r} = rg_{col} A$

$\boxtimes$

<u>Esercizio</u> Si consideri il sistema a coeff. in $\mathbb{R}$ nel parametro reale k.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ kx_1 - x_2 + kx_3 + x_4 = 1 \\ k^2x_1 - x_2 + k^2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni del sistema al variare di k

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ k & -1 & k & 1 & 1 \\ k^2 & -1 & k^2 & 1 & 0 \end{array}\right) = (A|b) \xrightarrow{\text{op. el. per ridurla a scala}}$$

⚠ se moltiplico per una quantità che dipende da k pensare cosa succede se è 0.

$$\xrightarrow[\substack{III - k^2 I}]{II - kI} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1+k & 0 & 1+k & 1 \\ 0 & -1+k^2 & 0 & 1+k^2 & 0 \end{array}\right)$$

$-1+k$ è pivot se $k \neq 1$

• $\boxed{\text{se } k = 1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$rg A = 2 \qquad rg(A|b) = 3 \Rightarrow$ sistema non ha soluz per $k=1$

• $\boxed{\text{se } k \neq 1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & (k-1)(k+1) & 0 & k^2+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III - (k+1)II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2k & -k-1 \end{array}\right)$$

$$k^2+1-(k+1)^2 = \cancel{k^2}\cancel{+1} - \cancel{k^2} \cancel{-1} - 2k$$

• se $k \neq 1, 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \cancel{k-1}\ 1 & 0 & \frac{k+1}{k-1} & 1/k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{+1+k}{2k} \end{array}\right) \xleftarrow{\text{op. elem.}} \frac{1}{k-1} II$$

$II^{new} \left(0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{k+1}{k-1} \middle| \frac{1}{k-1}\right)$

$rg A = rg(A|b) = 3$

Dunque il sistema ammette soluzioni $\dim Sol(Ax=0) = 1 = 4-3$ ($\#$inc. $-$ rg)

Risolvo per sostituzione dal basso

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \qquad x_1 = x_2 - a + \frac{1+k}{2k} = \frac{1}{k-1} - \frac{k+1}{k-1}\frac{1+k}{2k} - a + \frac{1+k}{2k}$

$\left(x_2 + \frac{k+1}{k-1}x_4 = \frac{1}{k-1}\right) \qquad x_2 = \frac{1}{k-1} - \frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{1+k}{2k}$

$x_3 = a \leftarrow$ parametro perché non è variabile di un pivot

$x_4 = \frac{1+k}{2k}$

Soluzioni

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k-1} + \frac{1+k}{2k} - \frac{(1+k)^2}{2k(k-1)} \\ \frac{1}{k-1} - \frac{(1+k)^2}{2k(k-1)} \\ 0 \\ \frac{1+k}{2k} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

se $k=0$ $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $\quad rg A = 2 < rg(A|b) = 3$

NO soluzioni

Riassumendo: Non vi sono soluzioni se $k \in \{0, 1\}$

vi sono infinite soluzioni se $k \notin \{0,1\}$

Esercizio Sia $U \leq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ generato da $\underset{}{\overset{u_1}{-1}}, \overset{u_2}{x+1}, \overset{u_3}{x^2+x^3}$

a) Determinare le eq. di U nella base canonica (di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$)

b) Trovare un compl. di U in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

c) Sia $W = \{$polinomi che si scrivono solo con potenze pari della $x\} \leq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

Determinare $U \cap W$ e $U + W$

d) Verificare che i 3 generatori dati di U sono l. indip e completarli a una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

e) scrivere le coordinate di u_1, u_2, u_3 risp. alla base canonica e rispetto alla base del punto d)

Base canonica di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ è $\{1, x, x^2, x^3\} = \mathcal{E}$

$$\alpha_{\mathcal{E}}(u_1) = \alpha_{\mathcal{E}}(-1) = \alpha_{\mathcal{E}}(-1\cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\alpha_{\mathcal{E}}(u_2) = \alpha_{\mathcal{E}}(x+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{\mathcal{E}}(u_3) = \alpha_{\mathcal{E}}(x^2+x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2, u_3 sono l. indip $\iff$ lo sono le loro coordinate in $\mathbb{R}^4$

in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$\underset{\alpha(u_1)}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{\alpha(u_2)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{\alpha(u_3)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \begin{array}{ccc} u_1' & u_2' & u_3' \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \alpha(u_1) & \alpha(u_2+u_1) & \alpha(u_3) \end{array}$$

sono l. indi
generano un sottosp. di dim 3 in $\mathbb{R}^4$
chiamiamolo U'

dim $U = 3$

$e_1 \in U'$? sì

$e_2 \in U'$? sì

$e_3 \in U'$ NO

u_1', u_2', u_3', e_3 sono l. indip

dunque formano una base di $\mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = e_3 \notin \langle \alpha(u_1), \alpha(u_2), \alpha(u_3) \rangle$

$\overset{\shortparallel}{\alpha_{\mathcal{E}}(x^2)}$ $\Big\{$

$x^2 \notin U$ $\qquad \{u_1, u_2, u_3, x^2\}$ formano base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

C'erano altre scelte? <u>Si</u> basta scegliere un vettore che non appartiene a U.

a)

$\overset{=u_1}{-1}, \overset{=u_2}{x+1}, \overset{=u_3}{x^2+x^3}$ generano U (sono base di U

$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ generano $U' \leq \mathbb{R}^4$

$\alpha_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \xrightarrow{\text{biiett}} \mathbb{R}^4$

$U \dashrightarrow U'$

le eq. cart di U risp. alla base canonica sono
- - - - - - - U'

$U' \ni \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} x_1 = -a + b \\ x_2 = b \\ x_3 = c \\ x_4 = c \end{cases}$

eq. parametriche sono $\begin{cases} x_1 = -a+b \\ x_2 = b \\ x_3 = c \\ x_4 = c \end{cases}$

Elimino i parametri $\begin{cases} a = -x_1 + x_2 \\ b = x_2 \\ \boxed{x_3 = x_4} \\ c = x_4 \end{cases}$

$x_3 - x_4 = 0$ è eq. cart. di U' e dunque di U

Ora che ho l'eq. cartesiana è facile trovare un $v \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $v \notin U$: $\overset{x_1}{\underset{\shortparallel}{a_0}} + \overset{x_2}{\underset{\shortparallel}{a_1}}x + \overset{x_3}{\underset{\shortparallel}{a_2}}x^2 + \overset{x_4}{\underset{\shortparallel}{a_3}}x^3$ con $a_3 \neq a_2$

ottengo un polinomio che non appartiene a U

: (resto esercizio per casa)