Note Title

Dimostrazione del Teorema (algoritmo di Gauss) vedere slide

↑ costruttiva

se è nulla, il rango è 0 e la matrice è già a scala.

scambio di righe

*Dim.* Sia $A$ una matrice non nulla. Si procede per induzione sul numero delle righe. Se la matrice ha una sola riga, abbiamo finito perché è già a scala. Se vi sono più di una riga, a meno di un'operazione elementare del tipo ~~i)~~ possiamo supporre che la prima colonna non nulla abbia il primo termine dall'alto non nullo, sia $a_{1,j_1}$. Allora tramite operazioni elementari del tipo iii) possiamo fare in modo che tutti gli altri termini di quella colonna diventino nulli. Ora si procede per induzione sulla sottomatrice che si ottiene cancellando la prima riga e le prime $j_1$ colonne, ossia la colonna che contiene $a_{1,j_1}$ e tutte quelle a sinistra di questa. Si ottiene così una matrice con un numero inferiore di righe e per induzione concludiamo che il processo si arresta dopo un numero finito di passi arrivando ad una matrice a scala. A questo punto dividendo ciascuna riga che contiene il pivot per il pivot (ossia con una operazione di tipo ~~i~~i) in cui si moltiplica la riga per l'inverso del pivot in essa contenuto) otteniamo una matrice speciale. Data poi una matrice in forma a scala speciale, sempre per induzione, possiamo tramite operazioni di tipo iii') rendere nulli tutti i termini che stanno nella colonna di un pivot, a parte il pivot stesso. □

già primo pivot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{III+2I}{\overset{II-3I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -9 \\ 0 & -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{III+\frac{5}{3}II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 2-\frac{20}{3} & 7-\cancel{\frac{45}{3}}^{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -14/3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{rango di } A = 3}$$

$$\underset{-\frac{3}{14}III}{\overset{\frac{1}{3}II}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{7} \end{pmatrix} \overset{I+2II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/3 & -3 \\ 0 & 1 & -4/3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+\frac{5}{3}III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3-\frac{12}{7}\cdot\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -4/3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -12/7 \end{pmatrix} \quad II + 4/3\, III \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

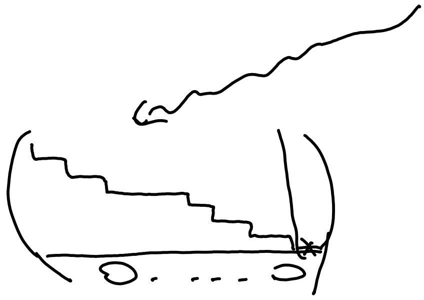
speciale

speciale

Dimostrazione del Teorema di R.-C. (vedere slide)

$Ax=b$ $\qquad A \qquad (A|b)$

Caso 1 $\quad rg A < rg(A|b)$



con operaz. el. su $(A|b)$ ottengo $(A'|b')$ in forma a scala e quest'ultima ha un pivot in più rispetto ad $A'$ (matrice a scala ottenuta da $A$)

vuol dire che l'ultima eq.ne non banale $0=0$ del sistema $S': A'x=b'$

è del tipo $0=c$ con $c\neq 0$

Dunque $S'$ non ha soluzioni. E quindi anche $S$ non ha soluzione perché $S'$ è stato ottenuto da $S$ con op. elementari e dunque $S'$ è eq. ad $S$.

Caso 2 $\quad rg A = rg(A|b) \geq 1$

$Ax=b \quad S \xrightarrow{\text{op. el.}} S' : A'x=b'$ con $(A'|b')$ a scala ridotta

$S'$ lo posso scrivere come $\begin{cases} x_{i_1} = c_1 + \dots \\ \vdots \\ x_{i_r} = c_r + \dots \end{cases}$

le incognite che corrispondono ai pivot

Ponendo uguali a 0 le incognite a 2° membro (ossia quelle che non corrispondono ai pivot) trovo una soluzione particolare $x_0$ di $S'$ e dunque di $S$.

In particolare $S$ ammette soluzioni.

Mostro ora che $Sol(Ax=b) = \underbrace{x_0 + Sol(Ax=0)}_{T}$

$\supseteq$

$\subseteq$

L'insieme $T \subseteq K^n$ è dato dalle colonne del tipo

$$\underbrace{x_0}_{= \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}} + \underbrace{v}_{\in \, Sol(Ax=0)}$$

"$\supseteq$" $\quad x_0 + v \in T$ e considero $A(x_0+v) =$

$$= Ax_0 + Av = b + 0 = b$$

Dunque $x_0 + v \in Sol(Ax=b)$

"$\subseteq$" $\quad$ Sia $x' \in Sol(Ax=b)$

$$x' = x_0 + (x' - x_0)$$

Verifico che $x' - x_0 \in Sol(Ax=0)$ In tal modo avrò che $x' \in T$

$$A(x' - x_0) = Ax' - Ax_0 = b - b = 0$$