Geo 1 - mod A - Lez 14 - 31/10/2023

Note Title

Esercizio di applicazione dell'ultima slide di ieri.

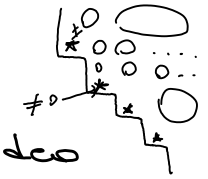
$\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

se avessi preso come v_4 il vettore $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix} - v_4 = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{pmatrix} = -3v_1+v_2-v_3$

Scopo: applico le 3 operazioni per portarli in forma a scalette

$$\begin{pmatrix}a\neq * \\ \vdots \\ \vdots\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 \\ *\neq 0 \\ \text{oppure} \\ *\neq 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\ \\ \end{pmatrix}$$



idea

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\3\end{pmatrix} \\ v_1 & v_2 & v_3+v_1 & v_4-2v_1 \\ \text{lo tengo} & \text{tengo} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix} \\ v_1 & v_2 & v_3+v_1 & v_4-2v_1+v_2 \end{array}$$

avrei ottenuto qui alla fine $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

PROVARE!

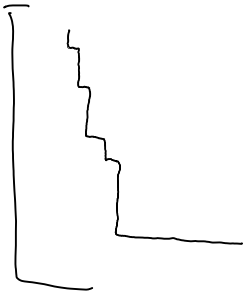
$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3+v_1 & \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ \begin{pmatrix}1\\0\\+1\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix} = (v_4-2v_1+v_2)-v_3-v_1 = -3v_1+v_2-v_3+v_4$$

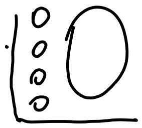
Sono l. indipendenti! $\quad \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2' + \alpha_3 v_3' + \alpha_4 v_4' = 0$

$$\begin{cases} \boxed{\alpha_1 = 0} \\ \cancel{0\alpha_1} + \boxed{\alpha_2 = 0} \\ \cancel{\alpha_1} + 2\cancel{\alpha_2} + \boxed{\alpha_3 = 0} \\ -\cancel{\alpha_1} + 3\boxed{\alpha_4 = 0} \end{cases}$$

I vettori scritti in scaletta con nessun vettore nullo sono l. indipendenti. Dunque lo erano anche i $v_1, .., v_4$



finchè non arrivo alla colonna $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ ogni volta che mi sposto a dx devono aumentare gli zeri.



Scalini con alzate anche di altezza $\neq$

Formula di Grassmann.

Siano U, W sottosp. f.g. di V sp. vett. su K.

Allora $\underbrace{\dim U}_{r+t} + \underbrace{\dim W}_{r+s} = \underbrace{\dim(U+W)}_{?\ r+t+s} + \underbrace{\dim(U\cap W)}_{r}$

Dim Scelgo una base di $U\cap W$, sia

$\mathcal{B}_{U\cap W}=\{v_1,\dots,v_r\}$. Se $U\cap W=0$ $r=0$ e non ci sono v_i

La completo ad una base di U

$\mathcal{B}_U=\{v_1,\dots,v_r,u_{r+1},\dots,u_{r+t}\}$. Se $U=U\cap W$ $t=0$ e non aggiungo gli u_j

Completo $\mathcal{B}_{U\cap W}$ a una ~~bas~~ base $\mathcal{B}_W$ di W

$\mathcal{C}=\{v_1,\dots,v_r,w_{r+1},\dots,w_{r+s}\}$

se $W=U$ $s=0$

Osservo che: $v_1,\dots,v_r$ sono l. ind. in $U\cap W$ e dunque in U; so da quanto visto ieri che posso sempre completare un sottoinsieme libero di U ad una base di U

$$U+W=\langle \underbrace{\overbrace{v_1,\dots,v_r}^{r},\overbrace{u_{r+1},\dots,u_{r+t}}^{t},\cancel{v_1,\dots,v_r},\overbrace{w_{r+1},\dots,w_{r+s}}^{s}}_{r+t+s \text{ generatori}}\rangle$$

Per dimostrare la formula basta vedere che questi vettori sono pure l. indip. Avrò così una base di $r+t+s$ vettori di $U+W$.

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_rv_r+\beta_{r+1}u_{r+1}+\dots+\beta_{r+t}u_{r+t}+\gamma_{r+1}w_{r+1}+\dots+\gamma_{r+s}w_{r+s}=0$$

devo mostrare che $\alpha_i,\beta_j,\gamma_k$ sono tutti 0

$$v:=\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\alpha_iv_i+\sum_{j=r+1}^{r+t}\beta_ju_j}_{\in U}=\underbrace{\sum_{k=r+1}^{r+s}(-\gamma_k)w_k}_{\in W}$$

$v\in U\cap W \Rightarrow v=\sum_{i=1}^{r}\delta_iv_i$ base di esistono δ_i

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_i v_i = \sum_{h=r+1}^{r+s} (-\gamma_h) w_h \iff \sum \delta_i v_i + \sum_h \gamma_h w_h = 0$$

ma $v_1 \dots v_r, w_{r+1}, \dots w_{r+s}$ sono l. ind $\iff \delta_i = 0$ $\boxed{\gamma_h = 0}$ $\forall i, h$

Dunque in particolare $v = 0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=r+1}^{r+t} \beta_j u_j$

Ma $v_1 \dots v_r, u_{r+1}, \dots u_{r+t}$ sono l. indip. dunque $\boxed{\alpha_i = 0}$ $\boxed{\beta_j = 0}$ $\forall i, j$

Esercizio per casa

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

in K^4 sono l. ind.?

se sono l. dip. scrivere una combinazione lineare non banale.

Siano $\mathcal{B}_U = \{u_1 \dots u_r\}$ una base di U e
$\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots w_s\}$ — — — W

Una base di $U \times W$ è data da $\underbrace{\{(u_1, 0), \dots, (u_r, 0), (0, w_1), \dots (0, w_s)\}}_{r+s}$

$U \times W = \{(u, w), u \in U, w \in W\}$

$$\dim (U \times W) = \dim U + \dim W$$

Infatti $\underset{U \times W}{(u, w)} = (u, 0) + (0, w) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, 0\right) + \left(0, \sum_{j=1}^{s} \beta_j w_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (u_i, 0) + \sum_{j=1}^{s} \beta_j (0, w_j)$$

Dunque gli $(r+s)$ vettori sopra sono generatori.

Sono l. indipendenti: Infatti se $\underbrace{\sum \alpha_i (u_i, 0) + \sum \beta_j (0, w_j)}_{\left(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j w_j\right)} = 0 = (0_U, 0_W)$

$\iff \sum \alpha_i u_i = 0_U \quad \sum \beta_j w_j = 0_W$

$\Updownarrow$ $u_1, \dots u_r$ base $\qquad \Updownarrow$

$\alpha_i = 0 \ \forall i \qquad \beta_j = 0 \ \forall j$

Sia $U \leq V$ siano $\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U

siano $\{u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di V
ottenuta completando quella di U

V/U = classi di equiv rispetto alla relaz $v \sim v' \iff v - v' \in U$

$\dim V/U = n - r = \dim V - \dim U$ e lo dimostro osservando
che una base di V/U è $[v_{r+1}], \dots, [v_n]$

Sia $v \in V$ $\quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n$

$$[v] = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\cancel{[\alpha_i u_i]}}_{0_{V/U}} + \sum_{j=r+1}^{n} \underbrace{[\alpha_j v_j]}_{\alpha_j [v_j]}$$

perché $\alpha_i u_i \in U$

$$= \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j [v_j]$$

dunque ho verificato che le classi
$[v_{r+1}], \dots, [v_n]$ generano V/U

Mostro indip lineare $0 = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j [v_j] = \sum_{j=r+1}^{n} [\alpha_j v_j] = \left[\sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j \right]$

ossia $\sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j \in U$ ossia $\sum \alpha_j v_j = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i$

opportuni

vettori della base di U

$$\sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i + \sum_{j=r+1}^{n} (-\alpha_j) v_j = 0_V \iff \delta_i = 0 \ \forall i$$

$\boxed{\alpha_j = 0 \ \forall j} \Rightarrow [v_j]$ sono l. indip

perché $u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n$
base di V