Geo 1 - mod A - Lez 13 - 30/10/2023

Note Title

Lemma di scambio: Sia V uno sp. vett su K fin. gen.

Siano $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ un insieme libero e

$G = \{w_1, \dots, w_n\}$ . . . . di generatori di V

Allora $n \geq m$.

Dim $V = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$

Idea: sostituire alcuni (esattamente m) generatori di V con gli elementi di S.

almeno uno

$v_1 \in V$ $\quad v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad \exists\, \alpha_i \in K$ con qualche $\alpha_i \neq 0$

$v_1 \neq 0$ di sicuro perché S è libero

A meno di riordino, posso supporre $\alpha_1 \neq 0$

$$v_1 = \underset{\neq 0}{\alpha_1} w_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i w_i \implies w_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} w_i$$

$$V = \langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \cancel{w_1}, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, w_2, \dots w_n \rangle$$

continuo con ...

$$v_2 = \beta_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i w_i \quad \exists\, \alpha_i \in K,\ \beta_1 \in K$$

con almeno un $\alpha_i \neq 0$

Infatti se $\alpha_i = 0\ \forall i$ avrei $v_2 = \beta_1 v_1$ ↯ perché S è libero

A meno di riordino suppongo $\alpha_2 \neq 0$

$$v_2 = \beta_1 v_1 + \underset{\neq 0}{\alpha_2} w_2 + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i w_i \qquad w_2 = \frac{1}{\alpha_2} v_2 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} v_1 - \sum_{i=3} \frac{\alpha_i}{\alpha_2} w_i$$

$$V = \langle v_1, w_2, \dots w_n \rangle = \langle v_1, v_2, \cancel{w_2}, \dots w_n \rangle$$

$\vdots$

$$v_r = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{r-1} v_r + \sum_{i=r}^{n} \alpha_i w_i \quad \exists\, \alpha_i \in K \text{ con } \alpha_i \text{ non tutti } 0 \text{ e } \beta_j \in K$$

$\vdots$

$$V = \langle v_1, v_2, \dots v_r, w_{r+1}, \dots w_n \rangle$$

$= \langle v_1, \dots, v_m, \underbrace{w_{m+1}, \dots, w_n}_{\substack{\text{non ci saranno} \\ \text{se } n = m}} \rangle$ Dunque vedo che $n \geq m$

NB non è possibile avere $V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ con $r < m$ altrimenti v_m sarebbe c. l. dei primi r $\lightning$ $\blacksquare$

<u>Conseguenze</u> Sia V uno sp. vett. f.g. Abbiamo visto che ogni base di V ha un numero fissato di elem. detto $\dim_{\mathbb{K}} V$ (dimensione di V su $\mathbb{K}$).

$(\mathbb{K})$ ← tralascio se chiaro

Sia $\dim V = n$. Se G è insieme di generatori, allora $\# G \geq n$

(ad es. in $\mathbb{R}^3$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

due vettori non possono generare $\mathbb{R}^3$: ne servono almeno 3

$\mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

v_1, v_2 non generano ma sono l. ind

v_1, v_2, v_3 sono l. indip. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Lemma</u>

Si dimostra che se $v_1, \dots, v_n$ sono l. indip e $n = \dim V$

$\Rightarrow$ sono anche generatori (e quindi formano base)

(Esercizio!) ↳ ripetere la dimostrazione del lemma di scambio

<u>Lemma</u> Se $v_1, \dots v_n$ sono generatori e $n = \dim V$ allora $v_1, \dots v_n$ sono l. indip. e quindi formano una base

<u>Riassumendo</u>: se $n = \dim V$ per verificare se n vettori formano una base mi basta controllare se sono generatori oppure se sono l. ind.

↳ Dim Se ~~sono~~ l. dip., a meno di riordino avrò

$v_n = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_{n-1} v_{n-1}$ $V = \langle v_1, \dots v_{n-1} \rangle$

$n-1$ generatori base (libera) formata da n vettori

lemma di scambio $n-1 \geq n$ ↯

Dunque i $v_1 \dots v_n$ sono pure l. indip.

Sia V uno sp. vett. $W, U \leq V$

Ricordo che $\underbrace{U + W}_{} \leq V$

↳ $\{ u + w, \ u \in U, \ w \in W \}$

scrivo $U \oplus W$ se $U \cap W = 0$

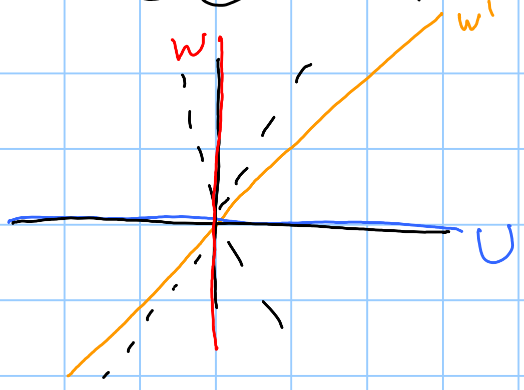
Def Diremo che U e W sono complementari se $U \oplus W = V$

Esempio $\mathbb{R}^2 = V$ $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U \oplus W = \mathbb{R}^2 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \rangle$

gen. di U gen di W

$W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$



$U \oplus W' = \mathbb{R}^2$

$\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \rangle$

$\mathbb{R}^2 = U \oplus \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$ con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin U$ ossia $b \neq 0$

vi sono infiniti complementari

• $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{U} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{W}$

Sospetto $V = U \oplus W$

$\dim V = \dim U + \dim W$?

Dubbio $V = U + W$ è vero che $\dim V = \dim U + \dim W$?

$\boxed{\text{No!}}$

$$\mathbb{R}^3 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} \rangle_{=U} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_4} \rangle_{=W}$$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$ $\exists$ α_i non tutti 0

$$0 \neq \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}_{\in U} = \underbrace{-\alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4}_{\in W}$$

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 1$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in U \cap W$ Dunque somma non diretta

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_3 = 0\\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha_1 = -\alpha_3\\ \alpha_2 = -\alpha_3\\ \alpha_4 = -\alpha_3\end{cases} \qquad \alpha_3 = -1$$

Formula di Grassmann (dimostr. domani)

Siano U, W sottosp. finitamente generati di V

Allora $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

$$\Downarrow$$

$$\dim(U \oplus W) + \underbrace{\cancel{\dim \emptyset}}_{0} = \dim U + \dim W$$

VEDERE SLIDE: basi ed equazioni

Esempio $\quad \mathbb{R}^4 \supseteq \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}_{=u_1}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}_{=u_2} \rangle}_{U}$ $\qquad \begin{cases}x_1 = x_2\\ x_3 = x_4\end{cases}$ eq. (eq. cart. risp. a base $\mathcal{E}$ canon.)

Calcolare eq. cartesiane di U rispetto alla base $\mathcal{V}$

ha coord $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ risp. a $\mathcal{E}$

Fisso una base di $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{V} = \{u_1, u_2, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=e_4}\}$ verificare! è base

$W \overset{?}{\subseteq} \mathbb{R}^4$

coordinate di U $\qquad \alpha_{\mathcal{V}}(u_1) = \alpha_{\mathcal{V}}(1u_1 + 0u_2 + 0e_1 + 0e_4) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\alpha_{\mathcal{V}}(u_2) = \alpha_{\mathcal{V}}(0u_1 + 1u_2 + 0e_1 + 0e_4) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$W = \langle e_1, e_2 \rangle$ eq. param. $\begin{cases}x_1 = a\\ x_2 = b\\ x_3 = 0\\ x_4 = 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ eq. cart. risp. $\mathcal{V}$ $\boxed{\begin{cases}x_3 = 0\\ x_4 = 0\end{cases}}$