Geo1 -mod A - Lez 12 - 25/10/2023

Note Title

V sp. vett su K chiamiamo base di V un sottoinsieme $S \subseteq V$ t.c. S sia libero e generatore.

Esempi : basi canoniche

sp. vett. STANDARD

K $\quad e_1 = 1$ $\quad$ base canon. $\{1\}$

K^2 $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ base can $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$

K^3 $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\vdots$

K^n $\quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-esimo $\quad \mathcal{E} = \{e_1, \dots e_n\}$

sono basi

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in K^3$ $\quad a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$

queste c. l. dà $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i$

(ossia e_1, e_2, e_3 sono l. ind.)

Analogamente $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$, $\quad a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ ed è $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i$

- $\mathbb{C}$ come sp. vett. su $\mathbb{C}$ ha base canonica $\{1\}$

  " . . . . $\mathbb{R}$ - - - . . . $\{1, i\}$

  infatti $\underbrace{a+ib}_{a \cdot 1 + b \cdot i} \in \mathbb{C}$ è c. l. di 1 e i

  e si ha $a+ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

- $K[x] \ni a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}$ $a_i \in K$

  base canonica $\{1, x, \dots, x^n, \dots\} = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$

- $K[x]_{\leq n}$ pol. di grado $\leq n$ formano sp. vett $< K[x]$

  $\uparrow$ fissato $\quad$ base canonica $\{1, x, \dots, x^n\}$

- $M_{m,n}(K) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} a_{ij} E_{ij}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

chiamo E_{ij} la matrice $m \times n$ che ha zeri ovunque tranne nel posto i,j dove c'è 1

Si verifica che $\mathcal{E} = \{ E_{ij},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \}$ è una base di $M_{m,n}$ che chiamo canonica.

Def Uno sp. vettoriale si dice <u>finitamente generato</u> se ammette un numero finito di generatori

Scriveremo $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad v_i \in V$

Mostreremo che ogni sp. v. finitamente generato ammette base e mostreremo che 2 basi diverse hanno la stessa cardinalità (# elem.)

Le basi interessano perché:

Sia $\mathcal{B} \subseteq V$ una base. Allora ogni vettore di V <u>si scrive</u> <u>in modo unico</u> come comb. lineare di vettori della base.

- $\mathcal{B}$ genera V: $\langle \mathcal{B} \rangle = V$

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{ \textstyle\sum a_i w_i \quad a_i \in K,\ w_i \in \mathcal{B} \}$$

Dunque $\forall\ v \in V \quad v = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i \quad a_i \in K,\ w_i \in \mathcal{B},\ m \in \mathbb{N}$

l'ho scritto come c. l. di vettori di $\mathcal{B}$

- Sia $v = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i = \sum_{j=1}^{m} a_j' w_j' \quad a_i, a_j' \in K \quad w_i, w_j' \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i w_i - \sum_{j=1}^{m} a_j' w_j' = 0_V$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{j=1}^{m} (-a_j)' w_j'}_{\text{c. l. a coeff in } K \text{ di vettori di } \mathcal{B}} = 0_V$$

Posso riscrivere le due somme così: definisco

$$\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r\} = \{w_1, \dots, w_n\} \cup \{w_1', \dots, w_m'\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{k=1}^{r} b_k \tilde{w}_k \qquad b_k = a_i \text{ se } \tilde{w}_k = w_i$$

zero altrimenti

analog. $\sum_{j=1}^{m} a_j' w_j' = \sum_{k=1}^{r} b_k' \tilde{w}_k$

Dunque posso assumere che $\{w_i\}$ e $\{w_j'\}$ siano lo stesso insieme

$$v = \sum_{i=1}^{r} b_i \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^{r} b_i' \tilde{w}_i$$

$$\sum b_i \tilde{w}_i + \sum (-b_i') \tilde{w}_i = 0_V$$

$$\sum (b_i - b_i') \tilde{w}_i = 0_V$$

Dunque $b_i = b_i'$ $\forall i$ perché i vettori $\tilde{w}_i$ sono l. indip.

Dunque ho unicità della scrittura. □

<u>Esercizio</u> Ridimostrare il risultato sopra nel caso $\mathcal{B}$ sia finita ossia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$ ORDINATA di vettori in uno sp. vett. f. g. allora

$$V \ni v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \qquad a_i \in K$$

$$\alpha_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

(n-upla) delle <u>COORDINATE</u> di v rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$\alpha_{\mathcal{B}} : V \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow K^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

è ben definita perché v si scrive in <u>modo</u> <u>unico</u> come c.l. dei $v_1, \dots, v_n$

è biiettiva.

suriettiva: data $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ proviene da $\sum a_i v_i$ $\checkmark$

iniettività: se v e w si scrivono entrambi come $\sum a_i v_i$ allora $v = w$

<u>Lemma di scambio</u> Sia V uno sp. vett. f.g. su K

Sia $\{w_1, \dots, w_r\}$ un insieme di generatori e sia $\{v_1, \dots, v_s\}$ - - - libero.

Allora $\boxed{s \leq r}$

dim settimana prox.

<u>TEOREMA</u> Sia V uno sp. v. fin. generato. Allora ogni base ha la stessa cardinalità detta <u>dimensione</u> di V $\dim_K V$

<u>Dim</u> Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ un'altra base

$\mathcal{B}_1$ genera, $\mathcal{B}_2$ è libero $\overset{\text{Lemma di sc.}}{\Longrightarrow} n \geq m$

$\mathcal{B}_2$ genera $\mathcal{B}_1$ è libero $\Longrightarrow m \geq n$

$\Rightarrow n = m$

$\blacksquare$

<u>Esercizio</u> $\dim_K K^n = ?$ $\qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = ?$

$\dim_K M_{m,n}(K) = ?$ $\qquad \dim_K K[x]_{\leq n} = ?$