Geo 1 - mod A - Lez 11 - 24/10/2023

Note Title

Sia $S \subseteq V$ un sottoins di uno sp. vett su $\mathbb{K}$

S si dice **libero** se ha la seg. proprietà:

" una comb. lineare (finita) di elem. di S dà il vettore nullo $\iff$ tutti i coefficienti sono 0 "

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s_i = 0_V \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{K},\ s_i \in S \iff \alpha_i = 0_{\mathbb{K}}\ \forall i \right)$$

Esempi

- $\mathbb{R}^3$ $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è libero

$$\underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{R}^3$ $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ NON è libero

i 4 vettori sono l. dip.

$$\underbrace{\overset{-1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{-2}{\alpha_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overset{1}{\alpha_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{1}{\alpha_4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_4 = \alpha_3 \end{cases} \qquad \alpha_3 \text{ parametro}$$

ho altre soluzioni con $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← è soluzione $\qquad$ infatti: $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Esercizio $\mathbb{R}^3$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ non è libero

Se $S \subseteq V$ è libero diciamo che i suoi vettori (di S) sono <u>linearmente indipendenti</u>.

Def Una famiglia di vettori si dice <u>linearmente dipend</u> se tali vettori non sono l. indip. (ossia esiste una comb. lineare di tali vettori a coeff. non tutti zero che dà il vettore 0_V)

Osservazioni / Esempi

- se $S \ni 0_V$ non è mai libero.

  Infatti $\underset{\alpha \neq 0}{1} \cdot 0_V = 0_V$ è c. l. ~~non~~ a coeff $\neq 0$ che mi dà il vettore nullo

- sia $v \neq 0_V$ in V

  $S = \{v\}$ è libero! $\quad \alpha v = 0_V \quad \alpha \in K$

  $\alpha = 0$

  $\alpha \neq 0 \quad \cancel{\alpha^{-1} \alpha v = \alpha 0_V = 0_V}$ ↯

  Necess $\alpha = 0 \Rightarrow v$ è l. ind.

- $S = \{ \overset{0_V}{\underset{\neq}{v}}, \overset{0_V}{\underset{\neq}{w}} \}$ $\qquad \alpha v + \beta w = 0_V \quad \alpha, \beta \in K$

  $\Leftrightarrow \alpha v = -\beta w$

  $\alpha = 0 \qquad 0_V = (-\beta) w \Rightarrow \beta = 0$

  $\alpha \neq 0 \qquad v = -\frac{\beta}{\alpha} w \Rightarrow v$ è multiplo di w

Dunque S è libero $\Leftrightarrow$ v e w non sono uno multiplo dell'altro

v, w sono l. dip $\Leftrightarrow$
- o uno dei due è nullo
- oppure sono uno multiplo dell'altro.

(NB) $\langle \overset{0_V}{\underset{\neq}{v}}, \overset{0_V}{\underset{\neq}{w}} \rangle = \langle v \rangle = \langle w \rangle$ se v e w sono l. dip.

superfluo

si cancella uno dei 2.

$\langle S \rangle \qquad \{\lambda v, \lambda \in K\} \qquad \{\mu w, \mu \in K\}$

i multipli di w

Esercizio (*) Siano $S \subseteq V$ un sottoinsieme e $v \in V$. Mostrare che
$$\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle \iff v \in \langle S \rangle$$
$\subseteq$ sempre vera

$\Leftarrow$) se $v \in \langle S \rangle \Rightarrow$ (v è c.l. di vettori di S)

$\langle S \rangle$ è un sottospazio che contiene sia S sia v

e dunque contiene $\underbrace{\langle S \cup \{v\} \rangle}_{\text{è il più piccolo cont. } S \cup \{v\}}$

Dunque $\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle$

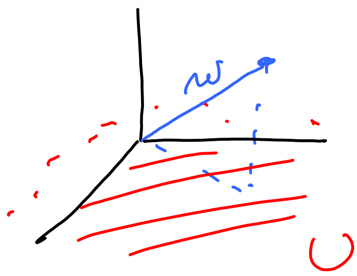
$\Rightarrow$) Sia $\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle \Rightarrow v \in \langle S \rangle$ banale $\square$

Applicazione:

In V sia $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Sia $v \in V$

$\langle u_1, \dots, u_k, v \rangle = U \iff v$ è c.l. dei vettori u_i

Esempio in $\mathbb{R}^3$ $\quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$



$\cap$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$ se voglio $W \neq U$

w, $z \neq 0$

Come eliminare generatori "superflui"

Esempio $\mathbb{R}^3$ $\quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e u_1, u_2, u_3 sono gen. liberi

$u_1 \quad u_2 \quad u_3$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = -\alpha \\ -2\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$U' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
soluzioni di $x + y + z = 0$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = \alpha \\ \cancel{-\alpha + \alpha = 0} \end{cases}$$

Ho soluzioni non banali $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$ ad es.

$\overset{1}{v_1} + \overset{1}{v_2} \overset{(-1)}{-v_3} = 0$ Dunque v_1, v_2, v_3 sono l. dip

$v_3 = v_1 + v_2$ $\quad \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ l. indip. non sono proporzionali

$v_1 = v_3 - v_2$ $\quad \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$

Def Un insieme libero di generatori di uno spazio vettoriale si dice BASE dello sp. vettoriale

Oss Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di V. Un vettore $v \in V$ è c. l. dei $v_1, \dots v_n \iff \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n, v \rangle$

È caso particolare di (*)

Lemma Dei vettori $v_1, \dots, v_n$ di V sono l. dip $\iff$ uno di essi può essere scritto come comb. lineare degli altri

Dim $\Leftarrow$) Suppongo che ci sia un indice $1 \le j \le n$ t.c.

v_j è comb. dei $v_1, \dots v_{j-1}, v_{j+1}, \dots v_n$

A meno di riordinarli posso supporre che $j = n$

$v_n = a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$ con $a_i \in K$

$0_V = a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_n$ è una c. l. a coeff. non tutti 0 che dà il vettore 0

Dunque $v_1, \dots, v_n$ sono l. dip.

$\Rightarrow$) Suppongo che $v_1 \dots v_n$ siano l.d.

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ con $\alpha_i \in K$ non tutti 0

Dunque esiste un indice $1 \le j \le n$ t.c. $\alpha_j \neq 0$

A meno di riordino suppongo sia $j = 1$

$\underset{\neq 0}{\alpha_1} v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \iff \cancel{\frac{1}{\alpha_1}\alpha_1} v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$

$\Rightarrow v_1$ è c. l. dei $v_2, \dots, v_n$ $\square$

<u>Oss</u> $\{v_1, v_2, 0_V\}$ sono sempre l. dip.

$$0v_1 + 0v_2 + \underset{\neq 0}{1} 0_V = 0_V$$

Se S è un sottoinsieme finito di V che contiene 0_V è formato da vettori l. dip.

<u>Esempio</u> $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

sono 4 vett. l. dip. in quanto

$$\boxed{v_3 = 1v_1 + (-1)v_2 + 0v_4} \quad ; \quad v_1 = v_3 + v_2 \; ; \quad v_2 = v_1 - v_3$$

$$v_1 - v_2 - v_3 + 0v_4 = 0$$

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$$

$$= \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

$$= \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$$

NON POSSO eliminare v_4

$$\neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Torniamo agli spazi vettoriali.

Dato V K-sp vettoriale abbiamo cercato spazi vettoriali contenuti in V (SOTTOSPAZI)

Dati: 2 sp. vettoriali V e W sullo stesso campo K si definisce lo sp. vettoriale prodotto come lo sp. v. su K t.c.

- l'insieme soggiacente è dato dal prodotto cartesiano $V \times W = \{(v, w), v \in V, w \in W\}$

- $+$ è definito componente per componente

$$+ : (V \times W) \times (V \times W) \longrightarrow V \times W$$

$$((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \longrightarrow (v_1 \underset{V}{+} v_2, w_1 \underset{W}{+} w_2)$$

• prodotto per scalari in K è def. pure comp. per comp.

$$\cdot \quad K \times (V\times W) \longrightarrow V\times W$$
$$(\alpha, (v,w)) \longmapsto (\alpha \underset{V}{\cdot} v, \alpha \underset{W}{\cdot} w)$$

S1 – S4 e M1 — M4 risultano soddisfatte come conseguenza del fatto che $\underset{V}{+}, \underset{W}{+}, \underset{V}{\cdot}, \underset{W}{\cdot}$ le soddisfano (da verificare!)

<u>Def</u> Siano V un K-sp. vettoriale e $U \leq V$ sottosp. Si indica con $V/_U$ lo spazio vettoriale quoziente così definito

*) $V/_U$ è l'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla relazione:

$$v \sim v' \iff v - v' \in U$$

*) $+ : V/_U \times V/_U \longrightarrow V/_U$

$$(\underset{\substack{\text{classe}\\\text{di eq.}\\\text{di } v}}{[v]}, [v']) \longmapsto [v+v']$$

* $\cdot \quad K \times V/_U \longrightarrow V/_U$

$$(\alpha, [v]) \longmapsto [\alpha v]$$

La def. sopra ha senso perché

a) $\sim$ è una relaz. di eq.

riflessiva $v \sim v$? $\quad v - v = 0 \in U$ sì

simmetrica $v \sim w \overset{?}{\Rightarrow} w \sim v$ sì

$$\begin{array}{ccc} v\sim w & & w \sim v \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ v - w \in U & \iff & w - v \in U \\ & & \overset{\shortparallel}{-(v-w)} \end{array}$$

transitiva (esercizio!)

b) Mostrare che $+$ è ben definita

Siano $[v] = [w] \qquad [v'] = [w']$

devo controllare che $[v+v'] = [w+w']$

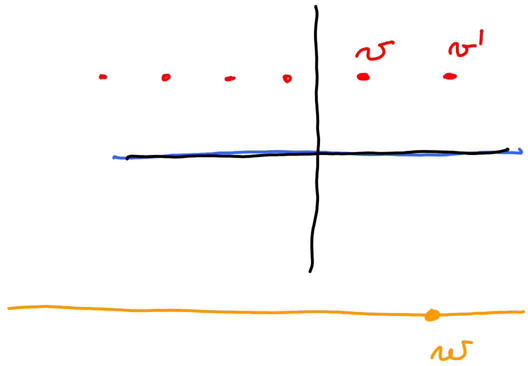
$$[v]=[w] \iff v \sim w \iff v-w \in U$$
$$[v']=[w'] \iff v' \sim w' \iff v'-w' \in U$$
$$\Downarrow \quad \text{perché } U \text{ è chiuso risp. } +$$
$$v-w+v'-w' \in U$$

ossia $\underbrace{v+v'-(w+w')}_{v-w+v'-w'} \in U \iff v+v' \sim w+w'$

$$\iff [v+v'] = [w+w']$$

c) Mostrare che $\cdot$ è ben definito ossia se $[v]=[w]$ allora $[\lambda v] = [\lambda w]$ (per esercizio)

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$



$$v \sim_U v' \iff v - v' \in U$$
$$v - v' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \ \exists a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \ \exists a \in \mathbb{R}$$

$$\iff y = y'$$

Visualizzo la classe $[v]$ in V/U come la retta parallela a U

Ogni classe corrisponde a una di queste rette.

$w \not\sim v$ (non $\in$) se lo visualizzo su rette $\neq$.

Esercizio $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ $\quad V/U = ?$