Geo 1 - mod A - Lez 10 - 23/10/2023

Note Title

$\langle S \rangle$ = più piccolo sottosp. di V che contiene S $\qquad$ S sottoins. di V ← K-sp. v.

= { c. l. a coeff. in K di elementi di S }

Gli el. di S sono detti generatori

Siano U, W sottosp. di V

$U + W := \langle U \cup W \rangle$

$= \{ u + w \,,\, u \in U \text{ e } w \in W \} =: Z$

da dim.

1) Dimostro che Z è sottospazio. sia $\lambda \in K$ siano $u, u' \in U$, $w, w' \in W$

$(u+w) + (u'+w') = \{u+u'\} + \{w+w'\} \in Z$; $\lambda(u+w) = \underset{\in U}{\lambda u} + \underset{\in W}{\lambda w} \in Z$

2) $Z \supseteq U \cup W$

$u \in U$ $\quad u = u + \underset{\in W}{0} \in Z$; analogamente $w \in W$ $\quad w = 0 + w \in Z$

3) Ogni sottospazio che contiene U e W contiene Z

Sia Z' sottosp. di V che contiene U e W

sono $u \in U \subseteq Z'$ $\quad w \in W \subseteq Z'$ $\Rightarrow u + w \in \underset{\text{sottosp.}}{Z'}$

$\Rightarrow Z \subseteq Z'$

Attenzione in generale la scrittura non è unica.

Es. $\mathbb{R}^3$ $\qquad U = \left\langle \underset{=u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{=w_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$ $\qquad W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$Z = \langle U \cup W \rangle = U + W$ $\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = u_1 - u_2 \in U \cap W$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underset{\in U}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + 0 = 0 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Def Siano $U, W \leq V$. Scriveremo $U \oplus W$, e diremo che la somma è <u>diretta</u> se $U \cap W = 0$

Lemma La somma $U+W$ è diretta se e solo se un vettore $v \in U+W$ si scrive in modo unico come somma $v = u+w$ con $u \in U$ e $w \in W$

Dim. Suppongo che $U \oplus W$ ossia $U \cap W = \underset{\text{sottosp. nullo}}{O} = \{0_V\}$
e sia $v = u+w = u'+w'$ $\quad u,u' \in U \quad w,w' \in W$

$$\Longrightarrow \underset{\underset{U}{\cap}}{u-u'} = \underset{\underset{W}{\cap}}{w'-w} \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} u-u'=0 \\ w'-w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=u' \\ w'=w \end{matrix}$$

ossia la scrittura è unica!

- Viceversa, suppongo che la scrittura sia unica
e sia $v \in U \cap W$ $\qquad v = \underset{\underset{U}{\cap}}{v} + 0 = 0 + \underset{\underset{W}{\cap}}{v}$
per l'unicità della scrittura
deve essere $v = 0$ ∎

Def/Lemma Siano $U_1, U_2, \ldots, U_r \leq V$ K-sp. vett.
si indica con $U_1 + U_2 + \cdots + U_r$ il più piccolo sottospazio che contiene $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_r$ o equivalentemente il sottospazio $\{u_1 + u_2 + \cdots + u_r,\ u_i \in U_i\} \leq V$
da dimostrare (esercizio)

La somma si dice diretta, e scriveremo $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$, se la scrittura è unica.

Osservo che posso avere $U_1 \cap U_2 = 0 \quad U_1 \cap U_3 = 0 \quad U_2 \cap U_3 = 0$
ma la somma $U_1 + U_2 + U_3$ non è diretta

Esempio $V = \mathbb{R}^2 \qquad U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$

$U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\}; \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \right\}$

$U_i \cap U_j = 0 \quad$ se $i \neq j$

$U_1 + U_2 + U_3 \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

non c'è unicità di scrittura.

(la condiz. da come è $U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = 0 \quad \forall_{1 \leq i \leq r}$
per avere $\bigoplus_{i=1}^{r} U_i$)

Prossimo obiettivo: indagare generatori di sottospazi, capire quando un generatore è superfluo, vedere quando un vettore è c. l. di altri vettori con coefficienti ben determinati

Torno all'esempio $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U + W$ non è diretto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \underline{\underline{U \cap W}}$

Dobbiamo calcolare $U \cap W$

$$U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha + \mu \end{pmatrix}, \ \alpha, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Fio dim.
che è dato dalle c. l. dei generatori

è dato dalle terne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c. $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha + \mu \end{cases}$ al variare di $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$

eliminazione dei parametri α, μ $\begin{cases} \alpha = x \\ \boxed{y = 0} \\ \mu = z - x \end{cases}$ $y = 0$ è eq. di U

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ generatori alternativi

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \overset{?}{\underset{\text{sì}}{=}} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \alpha = x \\ \mu = z - x \end{matrix}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases}$$

elim param. α, β $\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ z = y \end{cases}$ eq. di W è $y - z = 0$

$U \cap W \overset{?}{\ni} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfano $\begin{cases} y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ Ha le stesse soluz. di

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow U \cap W \ni \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \qquad U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Osservo tutti i vettori in $U \cap W$ ammettono 2 scritture nella forma $u + w$

~

$\mathbb{R}^3$ Siano $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ $\quad W' = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$U \oplus W'$

Per verificare che $U \cap W' = 0$

① eq. di U $\quad y = 0$

eq di W' $\rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

② controllo quali vettori di W' stanno in U

② $w' = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

metodi

soddisfa l'eq. di U $\rightsquigarrow a = 0$
$y = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 0 = \lambda \\ a = 0 \\ 0 = \lambda + \mu \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ a = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ ritrovo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

~

$\mathbb{R}^4$ $\quad U$ sottospazio delle soluzioni del sist. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

$W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

Capire se $U \oplus W$ e calcolare $U \cap W$.

Risolvere il sistema delle eq. di U : separare le variabili!

$\begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = x_4 - x_1 \end{cases}$ $\quad x_1, x_4$ diventano i miei parametri

(andava bene anche $\begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = x_1 + x_2 \end{cases}$ con x_1, x_2 parametri)

Pongo $x_1 = \lambda$, $x_4 = \mu$ e avrò $\quad x_3 = \lambda$
$x_2 = \mu - \lambda$

$U \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ se sono del tipo $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu - \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 0\mu \\ -\lambda + \mu \\ \lambda + 0\mu \\ 0\lambda + \mu \end{pmatrix}$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ossia sono del tipo $\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

eq di W ?

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta+2\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta + 2\gamma \\ x_3 = \alpha+\beta+\gamma \\ x_4 = \alpha+\beta \end{cases}$$

"eliminaz. dei parametri"

$$\begin{cases} \alpha = x_1 \\ \boxed{x_2 = x_4 - x_1 + 2(x_3 - x_4)} \\ \gamma = x_3 - \cancel{x_1} - x_4 + \cancel{x_1} \\ \beta = x_4 - x_1 \end{cases}$$

$\boxed{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0}$ eq. W (W è lo spazio delle soluz. di questa eq.)

$1 \quad 0 \quad -2(1)+1 = 0$ ✓

$0 \quad 1 \quad -2(1)+1 = 0$ ✓

$0 \quad 2 \quad -2(1)+0 = 0$ ✓

controllare che i generatori di W soddisfino l'eq.

$U \cap W =$ soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_3 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 - x_3 \\ x_4 - x_3 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = x_3 \end{cases}$$

x_3 diventa parametro α

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\longrightarrow$ verificare $x \in U$ sì, $x \in W$ sì

Dunque $U + W$ non è diretta!

[Esercizio: $U \oplus \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$?]

$U + W$? è sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$= \langle U \cup W \rangle = \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

vedremo a breve. generatore superfluo è $u_1 + u_2$

[se $U = \langle S \rangle$ e $W = \langle S' \rangle$

allora $U + W$ è generato da $S \cup S'$

ossia è $\langle S \cup S' \rangle$

$\langle S \cup S' \rangle \subseteq U + W$ ovvio

$\supseteq$ Se $u+w \in U+W$ $\quad \underbrace{\underbrace{(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k)}_{u} + \underbrace{(\beta_1 s_1' + \dots + \beta_\ell s_\ell')}_{w}}_{\text{è c.l. di vettori in } S \cup S'}$

con $\alpha_i, \beta_j \in K$

$s_i \in S$, $s_j' \in S'$

$U+W$ è dato dai vettori che posso scrivere come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ -a+b+c+2d \\ a+c+d \\ b+c \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a+b+c+2d \\ x_3 = a+c+d \\ x_4 = b+c \end{cases}$$

verificare che come sistema nelle incognite a, b, c, d e con termini noti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ha sempre (unica) soluzione $\begin{cases} a = x_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \end{cases}$

$\Rightarrow U+W = \mathbb{R}^4$

Def. Un insieme di vettori S in V si dice <u>libero</u> se una comb. lineare di vettori di S dà il vettore 0 se e solo se i coeff. sono tutti 0

$$\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n = 0_V \quad \text{con } s_i \in S$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_n = 0$$

$\left[\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right.$ non è libero $\Big]$