Esercizi 3a settimana

Note Title

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}[x]$. Dimostrare

a) Il sottoinsieme U dei polinomi di grado 2 <u>non</u> è un sottosp.

b) Il " $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ . . . . ≤ 2 è un sottosp.

c) Il sottoinsieme dei polinomi di grado n <u>non</u> è un sottosp

d) Il " $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dei polinomi di grado $\leq n$ è un sottosp.

Esercizio 2: Sia $\mathbb{R}[[x]] = \{ f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Scriveremo anche (per brevità)

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{con} \qquad a_n := f(n)$$

a) Mostrare che $\mathbb{R}[[x]]$ è uno spazio vett. su $\mathbb{R}$ con

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

e $\lambda \cdot \left(\sum a_n x^n\right) = \sum (\lambda a_n) x^n \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

b) Osservare che $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{R}[[x]]$ associando a un polinomio $\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ la serie $\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$

dove $b_i = a_i$ se $0 \leq i \leq N$ e $b_i = 0$ se $i > N$

Dimostrare che $\mathbb{R}[x]$ è un sottospazio

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^3$ dare un esempio di catena di sottospazi

$$W_0 < W_1 < W_2 < W_3$$

dove le inclusioni sono strette (ossia non sono uguaglianze)