Numeri complessi

(Rielaborazione di note di M. Candilera)

Alessandra Bertapelle

a.a. 2023-2024

Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus-facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.
(Paul Painlevé, *Analyse des travaux scientifiques* 1900)

Introduzione

- I numeri complessi hanno fatto le prime comparse nei lavori dei matematici rinascimentali, come *radici immaginarie* di equazioni algebriche.
- L'introduzione e l'uso sistematico dei numeri complessi viene messo in relazione con la dimostrazione di Gauss del *Teorema fondamentale dell'Algebra* (1799) e la loro rappresentazione geometrica (piano di Argand-Gauss).
- A partire dal XIX secolo, i numeri complessi compaiono sistematicamente nelle applicazioni della Matematica alla Fisica e diventano uno strumento per la risoluzione di problemi matematici ed un ambiente più *naturale* dei numeri reali per lo studio di problemi geometrici (Hilbert's Nullstellensatz).

Numeri Naturali

Consideriamo come noti i numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e passiamo in rassegna le loro proprietà.

Definizione (...o quasi): somma

Il numero naturale $m + n$ è l'n-esimo successore di m, ovvero $m + n = (((m + 1) + 1) + \cdots) + 1$ (n addendi uguali ad 1).

Definizione (...o quasi): prodotto

Il numero naturale mn si ottiene iterando n volte la somma di m con se stesso; ovvero $mn = (((m + m) + m) + \cdots) + m$ (n addendi uguali ad m).

Le operazioni di somma e prodotto sono due funzioni

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{N}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre (distributiva) $(x + y)z = xz + yz$

Numeri Interi

Diamo per noti i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$. Per ogni x, y, z in $\mathbb{Z}$, valgono

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre

(distributiva) $\quad (x+y)z = xz+yz$

Numeri Razionali

Diamo per noto l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$.

Un suo elemento si rappresenta con una *frazione* $\frac{a}{b}$ (con a, b in $\mathbb{Z}$ e $b \neq 0$) e due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ rappresentano lo stesso numero razionale se $ab' = a'b$ in $\mathbb{Z}$.

Il numero intero n si identifica con la frazione $\frac{n}{1}$ e in questo modo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ sono definite da

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{def}{=} \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\,\frac{c}{d} \overset{def}{=} \frac{ac}{bd},$$

e non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Q}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.
- (esistenza dell'inverso) dato $x \neq 0$, esiste x^{-1} tale che $x\,x^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(distributiva) $(x + y)z = xz + yz$.

Un insieme dotato di due operazioni con le proprietà scritte sopra si dice un *campo* [o *corpo commutativo*].

Numeri Reali

È noto che il rapporto tra lunghezze non fornisce sempre un numero razionale.

Ad esempio, il rapporto tra la lunghezza della diagonale e quella del lato di un quadrato vale $\sqrt{2}$.

O ancora, il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella di un suo raggio vale 2π.

Per questo viene introdotto il campo $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*. Lo diamo per noto in quanto verrà studiato in Analisi.

Nei numeri reali possiamo trovare le radici n-esime di tutti i numeri positivi, ma non possiamo trovare soluzioni a tutte le equazioni algebriche.

Ad esempio, non ci può essere soluzione all'equazione $X^2 + 1 = 0$. Se ci fosse un tale numero, -1 sarebbe un quadrato, ma in $\mathbb{R}$ tutti i quadrati sono positivi o 0.

Mostreremo ora dove sia possibile trovare radici a tutti i polinomi a coefficienti reali costruendo il campo dei numeri complessi a partire da $\mathbb{R}$.

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva.
Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$
Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$.
Dato $(a, b) \in \mathbb{C}$, il suo opposto è $-(a, b) = (-a, -b)$.
Se $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverso è $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Identifichiamo $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$ e scriveremo x in luogo di $(x, 0)$.

Sia $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che $i^2 = (-1, 0) = -1$. Ogni elemento (a, b) di $\mathbb{C}$ si scrive come

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$ (**rappresentazione algebrica**).

- Il numero complesso i è detto l'*unità immaginaria*.
- I numeri reali a e b sono detti, rispettivamente, la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = a + bi$. In simboli, $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$.

Vi è una corrispondenza biunivoca $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, detta *coniugio*, che associa a ogni numero complesso $z = a + bi$ il suo *coniugato* $\bar{z} = a + (-b)i = a - bi$.

Per ogni coppia di numeri complessi, z e w, valgono

proprietà del coniugio

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$;
- $\bar{z} = z$ se, e solo se, $z \in \mathbb{R}$;
- $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

modulo di un numero complesso

Il *modulo* (o valore assoluto) di un numero complesso, $z = a + bi$, è il numero reale (non negativo)

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{(a - bi)(a + bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

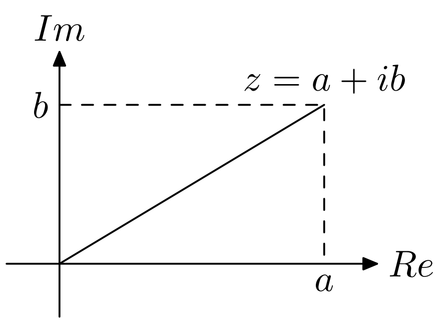
Il valore assoluto di $\mathbb{C}$ coincide col valore assoluto reale sul sottocampo $\mathbb{R}$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|\Re z| \leq |z|$ e $|\Im z| \leq |z|$.

proprietà del modulo

- $|z| = |\bar{z}|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
- $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; e $|z| = 0$ se, e solo se, $z = 0$;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$;
- $|zw| = |z|\,|w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$;
- se $z \neq 0$ allora $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ e $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$.

Piano di Argand-Gauss

Gli elementi di $\mathbb{C}$ "sono" i punti del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Al numero complesso $z = a + bi$ si associa il punto di coordinate (a, b).
L'asse orizzontale, è l'*asse reale*.
L'asse verticale, è l'*asse immaginario*.



Essendo gli assi ortogonali, $|a + ib|$ è la distanza del punto (a, b) dall'origine nel piano cartesiano.

Dati due numeri complessi, z e w, il modulo $|z - w|$ è la distanza tra i punti corrispondenti a z e w.

Sia r un numero reale positivo. Nel piano di Gauss l'insieme $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$ rappresenta i punti sulla circonferenza di centro z_0 e raggio r.

Sia r un numero reale positivo. Nel piano di Gauss l'insieme $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro z_0 e raggio r.

I punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (centro origine e raggio 1), corrispondono ai numeri complessi $\cos\vartheta + i \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Sia $z \neq 0$ in $\mathbb{C}$ e consideriamo

$$z' = \frac{z}{|z|} = c + di; \qquad \text{si ha} \qquad |z'| = \sqrt{c^2 + d^2} = 1.$$

Esiste un numero reale ϑ (unico se lo richiediamo in $[0, 2\pi)$) tale che $z' = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$ e si ha $z = |z| z'$ da cui

$z = |z|(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = |z| \mathrm{cis}\vartheta$ (**rappresentazione trigonometrica**).

ϑ è l'angolo formato dalla semiretta per z uscente dall'origine e la semiretta positiva dell'asse orizzontale.

ϑ è detto *argomento* del numero complesso $z \neq 0$ (ed è determinato da z a meno di multipli interi di 2π). Si indica con $\mathrm{Arg}(z)$.

Prodotto

Se $z_1 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$, sono numeri complessi non nulli, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = \\ |z_1 z_2|[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)],$$

Pertanto

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;
- $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$.

Potenze

Se $z_1 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ allora

$$\begin{aligned} z_1^2 &= |z_1|^2(\cos 2\vartheta_1 + i\sin 2\vartheta_1) \\ z_1^3 &= |z_1|^3(\cos 3\vartheta_1 + i\sin 3\vartheta_1) \\ \ldots \\ z_1^n &= |z_1|^n(\cos n\vartheta_1 + i\sin n\vartheta_1) \end{aligned}$$

Pertanto

- $|z_1^n| = |z_1|^n$;
- $\mathrm{Arg}(z_1^n) = n\mathrm{Arg}(z_1))$.

Di conseguenza, sappiamo calcolare le radici.
Per $z_0 \neq 0$ e $n \geq 1$, si ha

$$z^n = z_0$$

se, e solo se, $|z|^n = |z_0|$ e $n\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, ove $\vartheta = \operatorname{Arg} z$ e $\vartheta_0 = \operatorname{Arg} z_0$.

formula di de Moivre

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Ci sono n radici n-esime distinte per ogni numero complesso diverso da 0, che formano i vertici di un n-gono regolare centrato nell'origine.

esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Al variare di z in $\mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, e si ha $e^{z+w} = e^z e^w$.
Per ogni numero complesso $z_0 = |z_0|(\cos\vartheta_0 + i\sin\vartheta_0) \neq 0$, si ha

$$z_0 = |z_0|e^{i\vartheta_0} = \rho e^{i\vartheta_0} \qquad \textbf{(rappresentazione esponenziale)}$$

ove ϑ_0 è l'argomento di z_0 e $\rho = |z_0|$.

Identità di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

I numeri complessi sono un campo *algebricamente chiuso*. Vale il cosiddetto

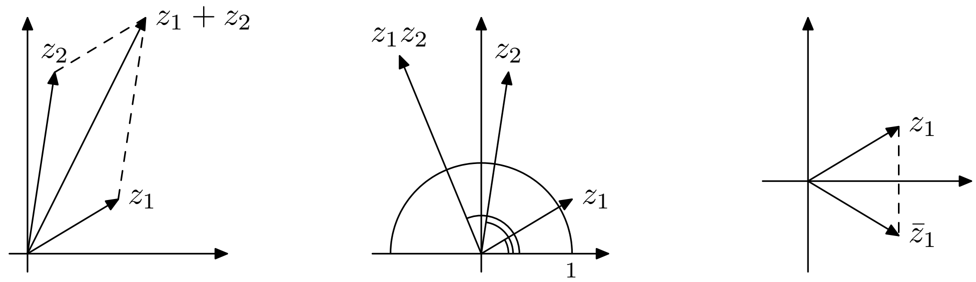
Teorema fondamentale dell'Algebra

Sia $P(X)$ un polinomio di grado positivo in $\mathbb{C}[X]$. Allora esiste un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.

Ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ si fattorizza come prodotto di polinomi lineari $X - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e polinomi di grado due $(X - \beta)(X - \bar{\beta})$ con $\beta \in \mathbb{C}$.

Interpretazione geometrica

Le operazioni in $\mathbb{C}$ hanno una rappresentazione geometrica nel piano di Gauss.



La *somma* per un numero z_2 è la traslazione corrispondente a quel vettore.
Il *prodotto* per un numero $z_2 = \rho e^{i\alpha} \neq 0$ è una dilatazione di rapporto ρ seguita da una rotazione di angolo $\alpha = \operatorname{Arg} z_2$.
Il *coniugato* di un numero complesso, z_1, è il simmetrico di z_1 rispetto all'asse orizzontale.

Rette e cerchi nel piano di Gauss

Luogo degli zeri di funzioni nelle **variabili hermitiane** z e $\bar{z}$.

Proposizione

Al variare di A e C in $\mathbb{R}$ e di α in $\mathbb{C}$, l'insieme $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid Az\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0 \}$ descrive:

- tutto il piano se $A = C = \alpha = 0$;
- l'insieme vuoto se $A = \alpha = 0$ e $C \neq 0$;
- una **retta** se $A = 0$ e $\alpha \neq 0$;
- l'insieme vuoto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC < 0$;
- un punto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 = AC$;
- una **circonferenza** di centro $-\alpha/A$ e raggio $\sqrt{|\alpha|^2 - AC}/|A|$ se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC > 0$.

Rette

La retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \neq (0, 0)$ ha equazione hermitiana

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2c = 0, \quad \text{con } \alpha = a + ib.$$

$\Leftarrow$) scrivere $\alpha = a + ib,\ z = x + iy$ e sviluppare i calcoli.

$\Rightarrow$) moltiplicare per 2 l'equazione cartesiana della retta, sostituire $2a = \Re\alpha = \alpha + \bar{\alpha},\ 2b = \Im\alpha = -i(\alpha - \bar{\alpha})$ e raccogliere α e $\bar{\alpha}$.

Punti allineati con 0

Due punti $z = x + iy = |z|e^{i\alpha}, w = u + iv = |w|e^{i\beta} \in \mathbb{C}$ sono allineati con l'origine 0 se e solo se

$$e^{i\alpha} = \pm e^{i\beta} \Leftrightarrow \frac{z}{|z|} = \pm\frac{w}{|w|} \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{w^2}{|w|^2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{w^2}{w\bar{w}}$$

se e solo se

$$z\bar{w} = \bar{z}w$$

3 punti allineati

Tre punti $z_0 = x_0 + iy_0, z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ sono allineati se e solo se $0,\ z_1 - z_0,\ z_2 - z_0$ sono allineati, se e solo se

$$(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)(z_2 - z_0),$$

La retta per due punti z_0, z_1 ha eq. hermitiana:

$$(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)z - (z_1 - z_0)\bar{z} + z_1\bar{z}_0 - \bar{z}_1 z_0 = 0.$$

ossia $\alpha = (z_1 - z_0)i$ e $C = 2\Im(z_1\bar{z}_0)$.

Caso particolare: retta per punti di $\mathbb{S}^1$

Se $|z_0| = 1 = |z_1|$ osservo che

- $z_1 - z_0 = -z_1 z_0(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)$;
- $(z_1 + z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = z_0\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_0$.

L'equazione della retta

$$(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)z - (z_1 - z_0)\bar{z} + z_1\bar{z}_0 - \bar{z}_1 z_0 = 0.$$

diventa allora

$$z + z_0 z_1 \bar{z} = z_0 + z_1.$$

Per ricordarla:

$$z + PQ\bar{z} = P + Q.$$

Circonferenze

La circonferenza di equazione cartesiana

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ha equazione hermitiana

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + C = 0,$$

con $\alpha = -(a + ib)$ e $C = |\alpha|^2 - r^2$.

Dim: $(x-a)^2+(y-b)^2 = |z+\alpha|^2 = (z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha}) = z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + |\alpha|^2$

Viceversa: $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + C = 0$ è l'equazione
- di una circonferenza se $|\alpha|^2 - C > 0$,
- di un punto se $|\alpha|^2 - C = 0$,
- non ha soluzioni se $|\alpha|^2 - C < 0$.

Angoli

Dati $w_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, w_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ non nulli l'angolo $w_1 \hat{0} w_2$ è

$$\theta_2 - \theta_1 = \operatorname{Arg} \frac{w_2}{w_1} = \operatorname{Arg}(w_2 \bar{w}_1), \qquad e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{w_2}{|w_2|} \frac{\bar{w}_1}{|\bar{w}_1|}.$$

Dati $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ l'angolo $z_1 \hat{z}_0 z_2$ è l'angolo $(z_1 - z_0)\hat{0}(z_2 - z_0)$

$$\alpha = \operatorname{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$$

Dunque

$$e^{i\alpha} = \frac{z_2 - z_0}{|z_2 - z_0|} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{|z_1 - z_0|}, \qquad e^{2i\alpha} = \frac{(z_2 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_0)(z_1 - z_0)}.$$

Esercizio: equazione di rette ortogonali

Siano $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ distinti. L'equazione della retta per z_0 ortogonale alla retta per z_0 e z_1 ha equazione hermitiana

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \bar{z}(z_1 - z_0) - z_0(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) - \bar{z}_0(z_1 - z_0) = 0.$$

Infatti deve essere $\alpha = \pi/2$ oppure $3\pi/2$ e dunque

$$-1 = e^{2i\alpha} = \frac{(z - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}{(\bar{z} - \bar{z}_0)(z_1 - z_0)} \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = -(\bar{z} - \bar{z}_0)(z_1 - z_0).$$

Se $|z_0| = 1 = |z_1|$ posso riscriverla come $z - z_0 z_1 \bar{z} = z_0 - z_1$.

$$z - PQ\bar{z} = P - Q.$$

Esercizio: equazione dell' asse

Siano $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Allora l'asse del segmento di estremi z_0, z_1 è dato da $|z - z_0| = |z - z_1|$, da cui l'equazione dell'asse:

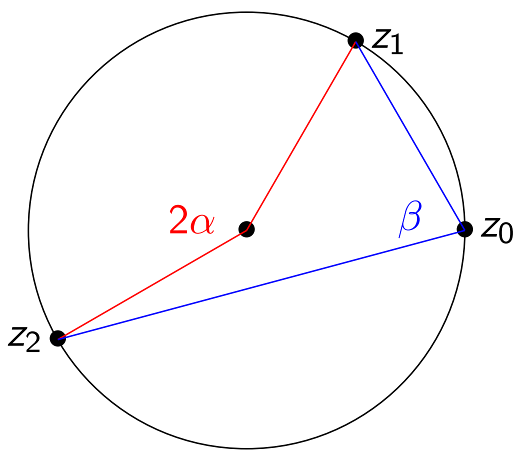
$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \bar{z}(z_1 - z_0) + |z_0|^2 - |z_1|^2 = 0.$$

Se $|z_0| = 1 = |z_1|$ posso riscriverla nella forma $z = z_0 z_1 \bar{z}$, o per ricordarla:

$$z = PQ\bar{z}$$

Esercizio: Angoli al centro e alla circonferenza

Mostriamo che $\alpha = \beta$.



Posso assumere circonferenza unitaria centrata in 0 e $z_0 = 1$. Sia $z_2 = z_1 e^{2\alpha i}$. Allora

$$\begin{aligned} e^{2\beta i} &= \frac{(z_2 - 1)(\bar{z}_1 - 1)}{(\bar{z}_2 - 1)(z_1 - 1)} \\ &= \frac{z_2}{z_1}\frac{(z_2 - 1)(1 - z_1)}{(1 - z_2)(z_1 - 1)} \\ &= \frac{z_2}{z_1} \end{aligned}$$

$$z_2 = z_1 e^{2\beta i} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Trasformazioni di Möbius e inversione circolare

Vi sono due tipi di trasformazioni del piano di Gauss che riflettono operazioni su $\mathbb{C}$.

I) Trasformazioni di Möbius:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \; ad - bc \neq 0.$$

II) Inversione circolare (o rispetto al cerchio unitario):

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$