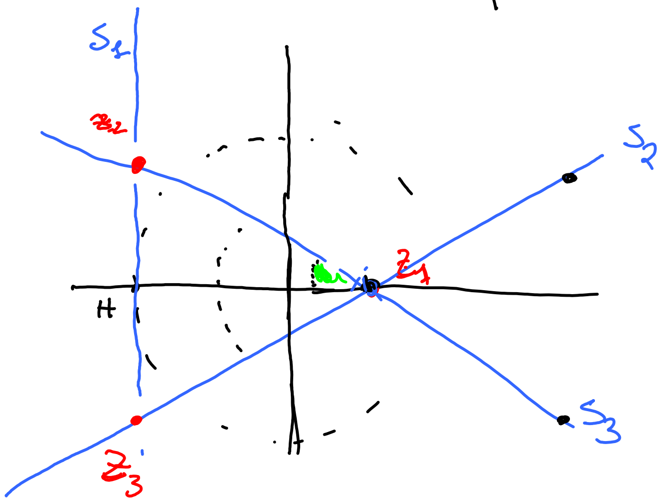
Geo1- mod A - Lez 6 -11/10/2021

Note Title

Esercizio : (continua) $\qquad (z+1)^3 = 8$

$z_1 = 1$
$z_2 = -2+\sqrt{3}\,i$
$z_3 = -2-\sqrt{3}\,i$

Disegnare le rette per questi 3 pti e scriverne le eq. cartesiane e Hermitiane.



S_1 : retta per $z_2\, z_3$

$x = -2 \qquad \boxed{x+2=0}$ ← eq cartes

$\alpha = 1 \qquad \boxed{z+\bar{z}+4=0}$ ← Hermitiana

S_3: retta per $z_1\, z_2$

$z_1 = (1, 0) \qquad z_2 = (-2, \sqrt{3}) \qquad z_3 = (-2, -\sqrt{3})$

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad (y-0) = m(x-1) \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

$3y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0 \qquad S_3: \boxed{x+\sqrt{3}y-1=0}$ controllo ✓

metodo 2 $\quad \frac{y-0}{\sqrt{3}-0} = \frac{x-1}{-2-1}$

$-3y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

metodo 3: $ax+by+c=0$ e impongo passaggio per z_1, z_2

$\begin{cases} a+c=0 \\ -2a+\sqrt{3}b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-a \\ b=\sqrt{3}a \end{cases} \quad \cancel{a}(x+\sqrt{3}y-1)=0$

La retta S_2 per z_1, z_3 : $\quad S_2: \boxed{x-\sqrt{3}y-1=0}$ controllo ✓

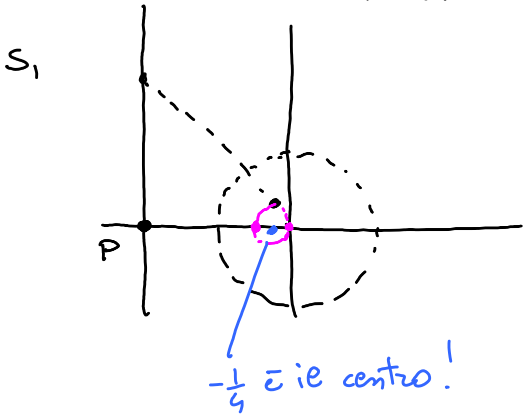
S_2 : $x-\sqrt{3}y-1=0 \qquad \alpha = 1-\sqrt{3}i \qquad C=-2$

$$\boxed{(1+\sqrt{3}i)z + (1-\sqrt{3}i)\bar{z} - 2 = 0}$$ eq. herm.

S_3 : $x+\sqrt{3}y-1=0 \qquad \alpha = 1+\sqrt{3}i \qquad C=-2$

$$\boxed{(1-\sqrt{3}i)z + (1+\sqrt{3}i)\bar{z} - 2 = 0}$$ eq. herm.

Calcolare l'inversione risp alla circonf. delle rette S_1, S_2, S_3



$x=-2 \qquad z+\bar{z}+4=0$

$z \xmapsto{\varphi} \frac{1}{\bar{z}} \qquad \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$P = -2 \longmapsto -\frac{1}{2}$

$-2+2i \longmapsto \frac{1}{-2-2i} = -\frac{1}{2+2i} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-i)}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{i}{4}$

Calcolo l'eq. $z+\bar z+4=0 \rightsquigarrow \frac{1}{\bar z}+\frac{1}{z}+4=0$

$\rightsquigarrow z+\bar z+4z\bar z=0 \rightsquigarrow z\bar z+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}\bar z=0$

$z\bar z+\bar\alpha z+\alpha\bar z+\cancel{c}=0$ $\quad c=0$ passa per 0

è circonferenza di $\alpha=\frac{1}{4}$

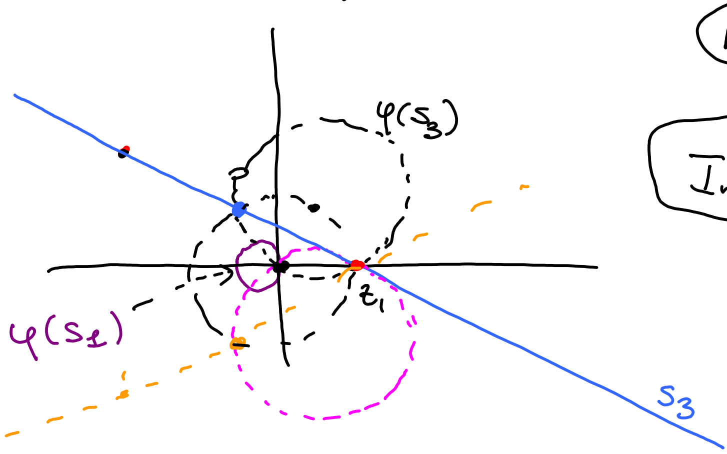
centro $-\alpha=-\frac{1}{4}$ e passando per l'origine raggio $=|\alpha|=\frac{1}{4}$

Calcolo l'inversa di $S_3 : (1-\sqrt{3}i)z+(1+\sqrt{3}i)\bar z-2=0$

$\rightsquigarrow (1-\sqrt{3}i)z+(1+\sqrt{3}i)\bar z-2z\bar z=0$

$\rightsquigarrow z\bar z-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)z\overbrace{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}^{\alpha}\bar z=0$

circonf passante per l'origine di centro $-\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$



NB se φ è l'inversione circolare e se $z\in\mathbb{S}^1 \Rightarrow \varphi(z)=z$

Infatti $z \longmapsto \frac{1}{\bar z}=\frac{z}{\underbrace{|z|^2}_{1}}$

$z_1=1\in\mathbb{S}^1$ $\quad \varphi(P)=P$

$\varphi(S_3)$ centro $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$

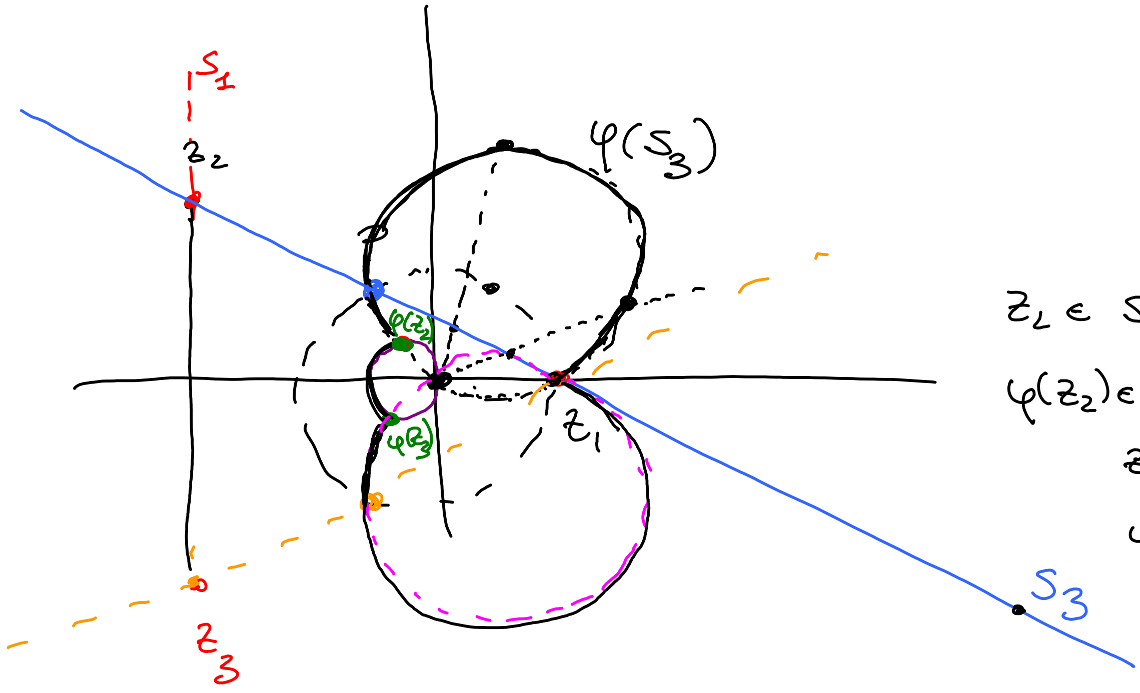
raggio è 1

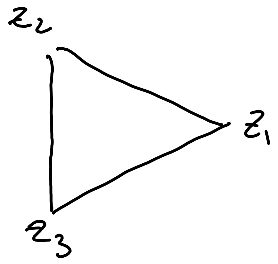
Se ora considero $\varphi(S_2)$ ha centro $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$ e raggio 1

calcolare l'equaz.

Domanda:

Qual è l'immagine tramite l'inversione circolare φ del triangolo (solo i punti sul bordo) $z_1z_2z_3$?





$z_2 \in S_1 \cap S_3$

$\varphi(z_2) \in \varphi(S_1) \cap \varphi(S_3)$

$z_3 \in S_1 \cap S_2$

$\varphi(z_3) \in \varphi(S_1) \cap \varphi(S_2)$

Dove finiscono i punti <u>interni</u> al triangolo $z_1 z_2 z_3$?
esterni

<u>Suggerimento</u>:
$\rightsquigarrow$ Studiare l'immagine tramite φ dei semipiani