Geo 1 - mod A- Lez 5 - 10/10/2023

Note Title

§ Trasf di Möbius o lineari fratte

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C} \qquad ad-bc \neq 0$$

osservo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{C}^*$

danno la stessa funzione ($\lambda = 3$)

$$z \longmapsto \frac{\cancel{\lambda} a z + \cancel{\lambda} b}{\cancel{\lambda} c z + \cancel{\lambda} d}$$

[Maggio: leggere in termini di proiettività in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$]

Tipi di fz. di Möbius:

I) AFFINITA' ~ Marzo se $c=0$ (ossia non è fratta)

$$\varphi : z \longmapsto \frac{az+b}{d} \qquad ad - \cancel{bc} \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \text{ e } d \neq 0$$

($bc = 0$)

$$= \frac{\overbrace{\left(\frac{a}{d}\right)}^{a'} z + \overbrace{\left(\frac{b}{d}\right)}^{b'}}{0 \cdot z + 1} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a/d & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posso assumere $d=1$

✓ affinità $z \longmapsto az+b$ è definita su tutto $\mathbb{C}$

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \varphi(z) = \underset{\neq 0}{a}z + b$$

φ^{-1}

φ è invertibile e l'inversa è pure T. di Möbius, è

$$\varphi^{-1} : \underset{w}{\overset{\shortparallel}{z}} \longmapsto \frac{1}{a} z - \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{a} w - \frac{b}{a}$$

Per ricavarla $\varphi(z) = az+b = w \qquad az = w-b \qquad z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$

a1) Se $a=1$ $\quad \varphi : z \longmapsto z+b$ <u>TRASLAZIONE</u>

a2) Se $b=0$ $\quad \varphi : z \longmapsto az$ $\quad$ Sia $\underset{\neq 0}{a} = \rho \cdot e^{i\theta}$

φ è ottenuta come composizione di due appl.

$$z \longmapsto \rho z$$
$$\rho z = w \longmapsto e^{i\theta} w = \rho e^{i\theta} z = az$$

$\rho > 1$ Dilatazione
$\rho < 1$ contrazione
$\rho = 1$ identità

rotazione (attorno a 0 di angolo θ)

Ogni affinità si ottiene componendo dilatazione/contrazione con una rotazione e poi una traslazione

$$z \to \rho z \to \rho e^{i\theta} z = az \longrightarrow az + b$$

II) $c \neq 0$ $\quad z \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad$ (c'è denominatore!)

$\varphi : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ è biiettiva con inversa

φ^{-1}, dove è definita, è data da $\quad w \longmapsto \dfrac{dw - b}{-cw + a}$

($w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e ricavo z in funzione di w)

La più importante è $\quad z \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{1}{z}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

viene detta <u>INVERSIONE</u>

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \varphi^{-1} = \varphi$$
$$\varphi^2 := \varphi \circ \varphi = id_{\mathbb{C}^*}$$

<u>Lemma</u> Ogni trasf. di Möbius è composizione di affinità e inversione.

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

affinità: $z \longmapsto cz + d$

inversione: $cz + d \longmapsto \dfrac{1}{cz+d}$

affinità: $w \longmapsto \underbrace{\left(b - \frac{da}{c}\right)}_{a'} w + \underbrace{\frac{a}{c}}_{b'}$

$$a' \left(\frac{1}{cz+d}\right) + b' = \frac{az+b}{cz+d}$$

e sviluppo trovando a', b'

Osservo $\quad z \longmapsto \dfrac{1}{z} \xrightarrow{\text{coniugio}} \dfrac{1}{\bar z}$

$$\underbrace{\qquad w \longmapsto \bar w \qquad}$$

INVERSIONE CIRCOLARE
(non è tr. di Möbius)

L'inversione $z \to \dfrac{1}{z}$ e l'inv. circolare $z \to \dfrac{1}{\bar z}$
mandano

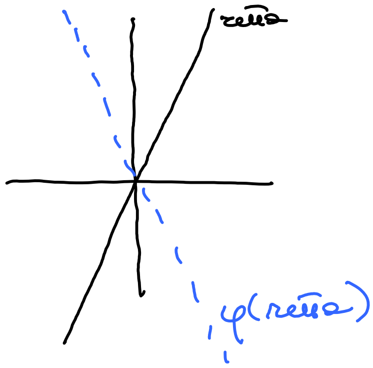
- rette per l'origine in rette per l'origine
- rette non passanti per l'origine in circonf passanti per 0
  circonf non .. . . non . . . .
- circonf passanti per l'orig in rette <u>non</u> passanti per 0

$$\left(\begin{array}{ll} z \longmapsto \dfrac{1}{z} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\text{biez}} \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* & 0 \longmapsto \infty \\ & \infty \longmapsto 0 \end{array} \right)$$

sarà chiaro a giugno.

$z \overset{\varphi}{\longmapsto} \dfrac{1}{z}$

$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$



$ax + by = 0 \qquad c=0$

$$\boxed{\alpha \bar z + \bar\alpha z = 0} \qquad C=0$$

$\alpha = a + ib$

φ(retta) $\quad - \; x+iy \rightsquigarrow \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{1}{z}$, $\quad x+iy = z \neq 0$

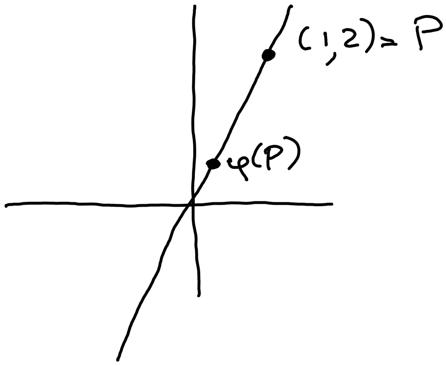
$$\alpha \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + \bar\alpha \frac{1}{z} = 0$$

l'immagine di retta soddisfa l'eq. sopra

$$\alpha \cdot \frac{1}{\bar z} + \bar\alpha \cdot \frac{1}{z} = 0 \qquad \boxed{\alpha z + \underbrace{\bar\alpha}_{(a-ib)} \bar z = 0}$$

retta immagine ha eq. cart. $ax - by = 0$

Se invece avessi considerato $\varphi : z \longrightarrow \dfrac{1}{\bar z}$
rifacendo i calcoli troverei che φ della retta $ax+by=0$
coincide con la retta stessa



$y = 2x \qquad 2x - y = 0$

$\varphi : z \longrightarrow \dfrac{1}{\bar z} \qquad (2+i)z + (2-i)\bar z = 0$

$z = 1+2i \longmapsto \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$

(i pti si muovono sulla stessa retta!)

$z\bar z + \alpha \bar z + \bar\alpha z = 0$ circonf. per l'origine

$z \longmapsto \dfrac{1}{\bar z} \qquad \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\bar z} + \alpha\dfrac{1}{\bar z} + \bar\alpha\dfrac{1}{z} = 0$

$1 + \alpha z + \bar\alpha \bar z = 0$ è retta non passante per l'origine

e viceversa

$\alpha \bar z + \bar\alpha z + \underset{\neq 0}{C} = 0 \rightsquigarrow \alpha\dfrac{1}{\bar z} + \bar\alpha\dfrac{1}{z} + C = 0$

$\alpha z + \bar\alpha \bar z + \underset{\neq 0}{C} z\bar z = 0$ circ. per 0

Analogamente $z \longrightarrow \dfrac{1}{\bar z}$ ripetere i calcoli

Sia ora $z\bar z + \alpha\bar z + \bar\alpha z + \underset{\neq 0}{C} = 0 \overset{z \to \frac{1}{\bar z}}{\underset{z \to \frac{1}{\bar z}}{\rightsquigarrow}}$ circonf non passante per l'origine.

__Esercizio__

Si considerino le soluzione dell'eq. $(z+1)^3 = 8$

Si disegnino nel piano di AG, si traccino le rette per tali punti e si scrivano le eq. delle rette e della circonf. C_1 per tali punti.

Si calcolino le inversioni risp. alla circonf delle rette e della C_1

Svolgimento $(z+1)^3 = 8$ $\qquad w = z+1 \Rightarrow z = w-1$

$$w^3 = 8 = 2^3 \cdot e^{i0}$$

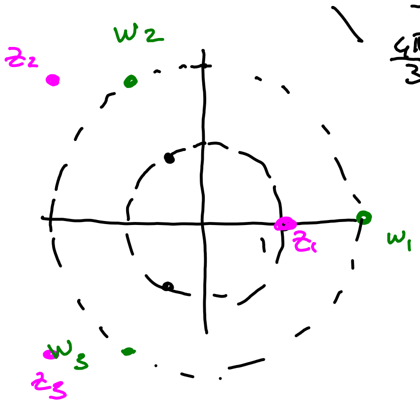
$$|w_i| = \sqrt[3]{2^3} = 2 \qquad \theta = \begin{cases} 0 \\ \frac{2\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$w_1 = 2$$
$$w_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$
$$w_3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$w_1 = 2$

$w_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

$w_3 = -1 - \sqrt{3}\, i$



$z_1 = 2 - 1 = 1$

$z_2 = w_2 - 1 = -2 + \sqrt{3}\, i$

$z_3 = w_3 - 1 = -2 - \sqrt{3}\, i$

z_1, z_2, z_3 appartengono alla circonf di centro $(-1, 0)$ e raggio 2

$(x+1)^2 + y^2 = 4$ $\quad$ ....)