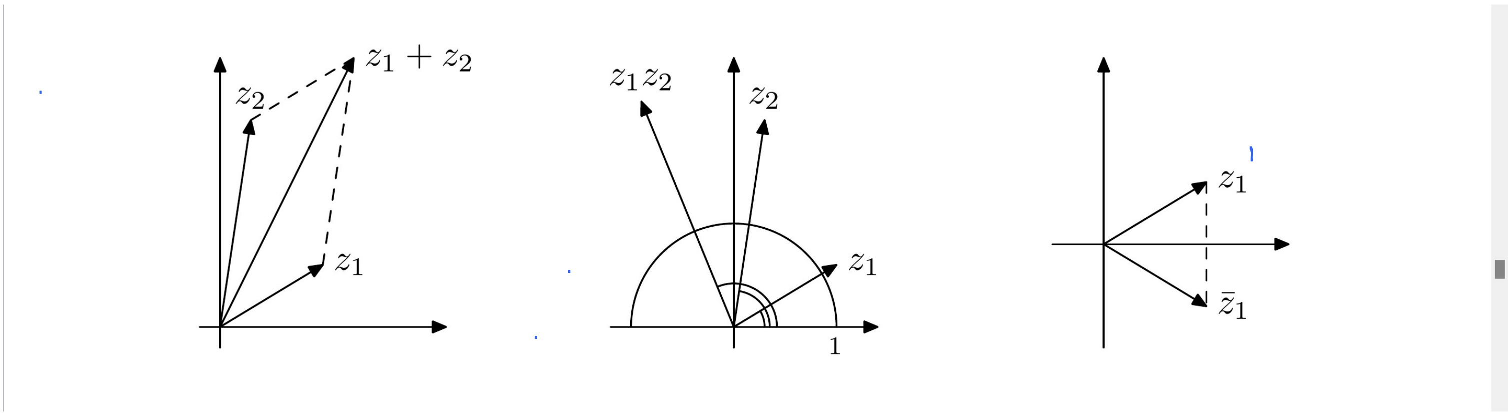
Geo 1 - mod A - Lez 4 - 9 ottobre 2023

Note Title



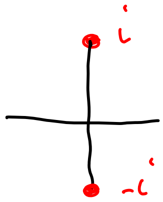
Es. Determinare le radici di -1

$-1 = 1\cdot e^{i\pi}$ $\qquad \theta_0=\pi \qquad \rho=1$

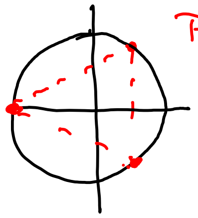
$n=2 \qquad z^2=-1 \qquad |z|=\sqrt[2]{1}=1 \qquad \operatorname{Arg} z=\theta=\begin{cases} \cancel{\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{2}} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2} \\ \cancel{\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}} \end{cases}$

$z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

$z_2=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$



$n=3 \qquad z^3=-1 \qquad |z|=1 \qquad \operatorname{Arg} z=\theta=\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi \\ \frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{3}=2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$



Triangolo equilatero

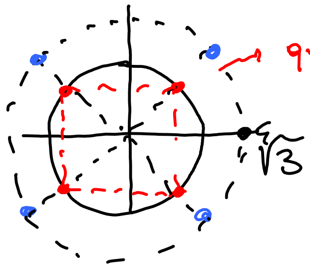
$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2=-1, \quad z_3=e^{i\frac{5}{3}\pi} = \bar{z}_1$

x^3+1 ha almeno una radice reale

↳ se $\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ è radice $\Rightarrow \bar{\beta}$ lo è

$n=4 \qquad z^4=-1=e^{i\pi} \qquad |z|=1$

$\theta=\begin{cases} \frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi \\ \frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi=2\pi-\frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi=2\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$



quadrato

Calcolare le radici quarte di $-3 = \underset{\rho}{3} \cdot e^{i\pi}$

$z^4 = -3$ $\qquad |z| = \sqrt[4]{3}$

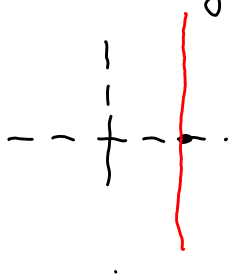
$\operatorname{Arg} z$ sarà uno dei 4 sopra.

x, y sono delle coord. cartesiane $\qquad x = \frac{z+\bar z}{2} \qquad y = \frac{z-\bar z}{2i}$

$z, \bar z$ - - - - - - hermitiane $\qquad z = x+iy \qquad \bar z = x-iy$

Descrivere i numeri $z \in \mathbb{C}$ t.c. $z + \bar z = 2$

$z = x+iy \qquad x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} = 2 \qquad 2x = 2 \qquad x = 1$



Idem t.c. $\qquad z - i\bar z = 2$

$x+iy - i(x-iy) = 2 \qquad \underbrace{x-y} + i(\underbrace{y-x}) = 2 + 0i$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - x = 0 \end{cases}$$ non ha soluzioni

Idem $\qquad z - \bar z = 2$

$x+iy - (x-iy) = 2 \qquad \cancel{x} - \cancel{x} + i2y = 2$

Cercare i numeri complessi z t.c.

$|z \underbrace{-1-i}_{+\alpha}| = 2 \iff |z-1-i|^2 = 4$

$\iff (z-1-i)(\bar z - 1 + i) = 4$

$\iff z\bar z + z\underset{\bar\alpha}{\underset{\parallel}{(-1+i)}} + \bar z \underset{\alpha}{\underset{\parallel}{(-1-i)}} + \underbrace{|-1+i|^2 - 4}_{-2} = 0$

NB $\quad |z+\alpha| = 2$ sono i numeri complessi aventi distanza 2 da $-\alpha \in \mathbb{C}$

$2 = |(z+\alpha)| = |z-(-\alpha)|$ Corrispondono ai pt. della circonf. di centro $-\alpha$ e raggio 2.

Proposizione

Al variare di A e C in $\mathbb{R}$ e di α in $\mathbb{C}$, l'insieme $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid Az\bar{z} + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0 \}$ descrive:

- V tutto il piano se $A = C = \alpha = 0$;
- V l'insieme vuoto se $A = \alpha = 0$ e $C \neq 0$;
- V una **retta** se $A = 0$ e $\alpha \neq 0$;
- l'insieme vuoto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC < 0$;
- un punto se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 = AC$;
- una **circonferenza** di centro $-\alpha/A$ e raggio $\sqrt{|\alpha|^2 - AC}/|A|$ se $A \neq 0$ e $|\alpha|^2 - AC > 0$.

Considero il caso $\boxed{\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{C}^{*} \leftarrow$ non nullo, $\mathbb{C}^{*} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Mostro che gli $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, che soddisfano l'eq. sopra sono tutti e soli i punti del piano di AG che appartengono alla retta di eq

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{con} \quad \underline{\alpha = a+ib}, \quad \underline{C = 2c}$$

Infatti: $z = x+iy \quad \alpha = a+ib \quad C = 2c$

$\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0$ diventa

$$(a+ib)(x-iy) + (a-ib)(x+iy) + 2c = 0$$

$$ax - \cancel{aiy} + \cancel{ibx} + by + ax + \cancel{aiy} - \cancel{ibx} + by + 2c = 0$$

$$\cancel{2}ax + \cancel{2}by + \cancel{2}c = 0$$

Viceversa, se parto da $ax + by + c = 0$, definisco $\alpha := a+ib$, $C := 2c$, $z = x+iy$

$$2ax + 2by + 2c = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(\alpha+\bar{\alpha})\frac{(z+\bar{z})}{\cancel{2}} + \frac{\alpha-\bar{\alpha}}{i}\,\frac{z-\bar{z}}{\cancel{2}i} + 2C = 0$$

$\alpha + \bar{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha = 2a \qquad z + \bar{z} = 2x$

$\alpha - \bar{\alpha} = 2i\,\mathrm{Im}\,\alpha = 2ib \qquad z - \bar{z} = 2iy$

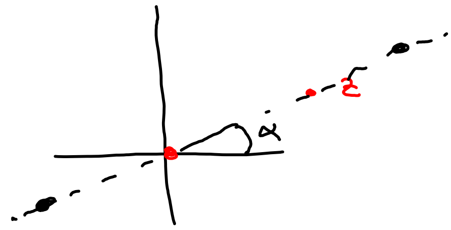
$$\cancel{\alpha z} + \alpha\bar z + \bar\alpha z + \cancel{\bar\alpha \bar z} - (\cancel{\alpha z} - \bar\alpha z - \alpha \bar z + \cancel{\bar\alpha\bar z}) + 2C = 0$$

$$\cancel{2}\alpha\bar z + \cancel{2}\bar\alpha z + \cancel{2} C = 0$$

§ Punti allineati nel piano

a) Siano $0\neq z = x+iy = |z|e^{i\alpha}$ e $0\neq \overbrace{w}^{z'} = \overbrace{u}^{x'} + iv = |w|e^{i\beta}$ in $\mathbb{C}$

z e w sono allineati con $0 \iff$



$\iff \alpha=\beta$ oppure $\alpha = \pi+\beta$

$\iff e^{i\alpha}=e^{i\beta}$ oppure $e^{i\alpha} = -e^{i\beta}$

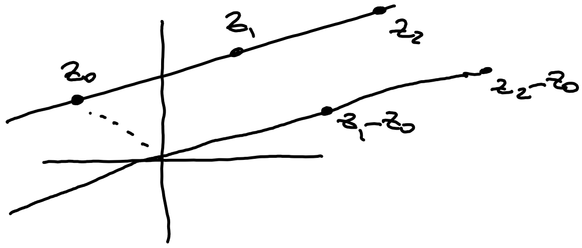
$$\iff \frac{z}{|z|} = \pm\frac{w}{|w|} \iff \frac{z^2}{|z|^2}=\frac{w^2}{|w|^2}$$

$$\iff \frac{z^{\cancel{2}}}{\cancel{z}\cdot\bar z} = \frac{w^{\cancel{2}}}{\cancel{w}\cdot \bar w} \iff \boxed{z\bar w = \bar z w}$$

b) Siano $z_0=x_0+iy_0$ $\quad z_1 = x_1+iy_1$ $\quad z_2=x_2+iy_2$

3 pti distinti.

z_0, z_1, z_2 sono allineati $\iff 0,\ z_1-z_0,\ z_2-z_0$ sono allineati



$$\iff (z_1-z_0)\overbrace{(\bar z_2-\bar z_0)}^{\bar z} = (\bar z_1-\bar z_0)\overbrace{(z_2-z_0)}^{z}$$

Eq. retta passante per z_0 e z_1 pti distinti in $\mathbb{C}$

$$0 = (\bar z_1-\bar z_0)z - (z_1-z_0)\bar z + \bar z_0(z_1-\cancel{z_0}) - z_0(\bar z_1 - \cancel{\bar z_0})$$

$$0 = (\bar z_1 - \bar z_0)z - (z_1-z_0)\bar z + \underbrace{z_1\bar z_0 - z_0\bar z_1}_{\notin\mathbb{R}} = 0 \qquad = 2i\,\Im(z_1\bar z_0)$$

$$0 = \underbrace{\left(\frac{\bar z_1-\bar z_0}{i}\right)}_{\bar\alpha} z + \underbrace{i(z_1-z_0)\bar z}_{\alpha} + \underbrace{2\,\Im(z_1\bar z_0)}_{C} = 0$$

Retta passante per z_1, z_0 ha eq.

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + C = 0 \quad \text{con} \quad \alpha = i(z_1 - z_0)$$
$$C = 2\,\Im(z_1 \bar{z}_0)$$

3) Interessante nel caso $z_1, z_0 \in S^1 \leftarrow$ circonf. di centro 0 e raggio 1

$$|z_1| = |z_0| = 1$$

Posso riscrivere l'eq. sopra come

$$\boxed{z + (z_1 z_0)\bar{z} = z_1 + z_0} \qquad \boxed{z + PQ\bar{z} = P + Q}$$

Scrivo P al posto di z_1 e Q al posto di z_0

Infatti: l'eq di partenza $(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)z - (z_1 - z_0)\bar{z} + z_1\bar{z}_0 - z_0\bar{z}_1 = 0$

diventa. $(\bar{P} - \bar{Q})z - (P - Q)\bar{z} + P\bar{Q} - \bar{P}Q = 0$

Osservo ora che
- $-(P - Q) = PQ(\bar{P} - \bar{Q})$ perché $P\bar{P} = 1$, $Q\bar{Q} = 1$
- $P\bar{Q} - \bar{P}Q = -(\bar{P} - \bar{Q})(P + Q)$

Dunque

$$\cancel{(\bar{P} - \bar{Q})}z + PQ\cancel{(\bar{P} - \bar{Q})}\bar{z} - \cancel{(\bar{P} - \bar{Q})}(P + Q) = 0$$

Da cui $\quad z + PQ\bar{z} = P + Q.$ $\square$