Geo 1 - mod A - Lezione 2 - 3 ottobre 2023

Il campo **C** dei numeri complessi è l'insieme **R** × **R** con le operazioni di somma e prodotto definite da
(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)
(a, b)(c, d) = (ac −bd, ad +bc)
qualunque siano (a, b) e (c, d) in **R** × **R** .
La somma e il prodotto in **C** godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva.
Esiste un elemento neutro per la somma, (0, 0)
Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, (1, 0).
Dato (a, b) ∈ **C**, il suo opposto è −(a, b) = (−a, −b).

Se (a, b) ≠ (0, 0), il suo inverso è ... $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

inclusione tra insiemi

$$\mathbb{R} \subseteq \underbrace{\{ \dots ? \}}_{\mathbb{C}} \ni i \qquad i^2 = -1$$

insieme

$i \in \{ \dots \}$

appartiene

in $\mathbb{C}$ dovrò trovare gli $a \in \mathbb{R}$

. . . . i t.c. $i^2 = -1$

dovrà essere un campo $< \begin{smallmatrix} + \\ \cdot \end{smallmatrix}$ 8+1 proprietà

dunque $\forall b \in \mathbb{R}$ deve essere $\underbrace{b \cdot i}_{\text{lo scrivo brevemente } bi} \in \mathbb{C}$

per ogni

e $\forall a, b \in \mathbb{R}$ deve essere $a + bi \in \mathbb{C}$

Inoltre dati $a+bi \in \mathbb{C}$ e $c+di \in \mathbb{C}$

$$\underset{\mathbb{C}}{(a+bi)+(c+di)} \overset{\text{commutat.}}{\underset{\text{dovrà essere}}{=}} a+c+bi+di$$

$$\overset{\text{assoc}}{=} (a+c)+(bi+di) \overset{\text{distr.}}{=} \underbrace{(a+c)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(b+d)}_{\in \mathbb{R}} i$$

$$\text{Inoltre } (a+bi)(c+di) \overset{\text{distr.}}{=} a(c+di) + bi(c+di)$$

$$\overset{\text{distr.}}{=} ac + adi + bic + bidi$$

$$= ac + adi + bci + bd\cancel{i^2}^{(-1)}$$

$$\overset{comm}{=} ac - bd + (ad + bc)i$$

Coniugio $\quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \underset{a+bi}{\overset{\shortparallel}{z}} \longmapsto \underset{a-bi}{\overset{\shortparallel}{\bar z}}$ coniugato di z

proprietà del coniugio

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\qquad z = a+bi = a+ib$
- 2) $\overline{z+w} = \bar z + \bar w$;
- 3) $\overline{zw} = \bar z \, \bar w$;
- $\bar z = z$ se, e solo se, $z \in \mathbb{R}$;
- $\overset{a}{\Re z} = \frac{z+\bar z}{2}$;
- $\overset{b}{\Im z} = \frac{z-\bar z}{2i}$.

$z = a+ib \qquad w = c+id \qquad \overline{zw} \overset{?}{=} \bar z \, \bar w$

$\overline{zw} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc)$

$\bar z \, \bar w = \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)} = (a-ib)(c-id) = ac - bd + i(-ad-bc)$ // OK

Esercizio scrivere bene la dim di 2)

Modulo di un numero complesso
o valore assoluto

$z = a+ib \qquad |z| = \sqrt[2]{\underbrace{a^2+b^2}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}} = \sqrt{z \cdot \bar z}$

$\Rightarrow |z|^2 = z \cdot \bar z$

$|z| \geq 0$ e vale $0 \iff a = b = 0$
se e solo se

proprietà del modulo

1) - $|z| = |\bar{z}|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
- $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; e $|z| = 0$ se, e solo se, $z = 0$;

3) - se $z \neq 0$ allora $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$;

4) - $|z + w| \leq |z| + |w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$;

5) - $|zw| = |z|\,|w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$.

1) $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|\bar{z}| = |a-ib| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$a-bi = a+(-b)i$

3) $z = a+ib$ con $(a,b) \neq (0,0)$

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $\qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ $\qquad 1 = z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \left(\text{NB } \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \right)$

4) Disuguaglianza triangolare

$0 \leq |z+w| \overset{?}{\leq} |z| + |w|$ $\qquad z = a+ib \qquad w = c+id$

$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = \underline{z\bar{z}} + w\bar{z} + z\bar{w} + \underline{w\bar{w}}$

$= |z|^2 + \underbrace{\underset{u}{w\bar{z}} + \underset{\bar{u}}{z\bar{w}}}_{2\mathrm{Re}\, u = 2\mathrm{Re}(w\bar{z})} + |w|^2$

$\bar{u} = \overline{w\bar{z}} = \bar{w} \cdot \bar{\bar{z}} = \bar{w} z$

$(|z| + |w|)^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = |z|^2 + 2\underbrace{|\bar{z}||w|}_{|u|} + |w|^2$

ho usato 5)

Basta osservare che $\cancel{2}\underbrace{\mathrm{Re}\, u}_{\alpha} \leq \cancel{2}|u|$ $\qquad u = \alpha + i\beta$

$\alpha \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

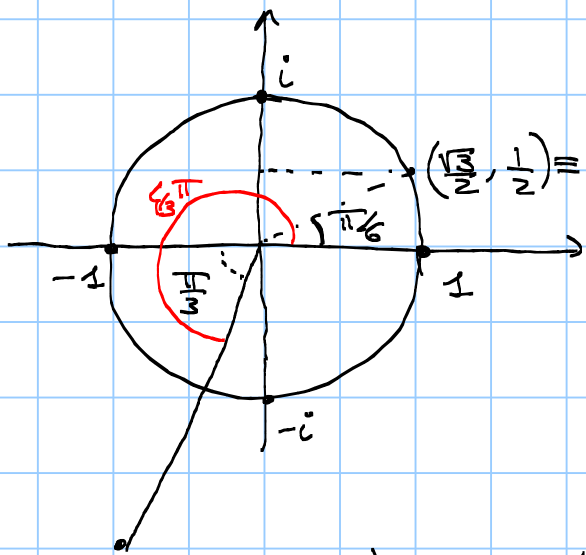
NB per dim 5) non serve 4)

Esercizio!

Disegnare $z \in \mathbb{C}$ nel piano A.G.

$|i| = 1$

$0 + 1i$

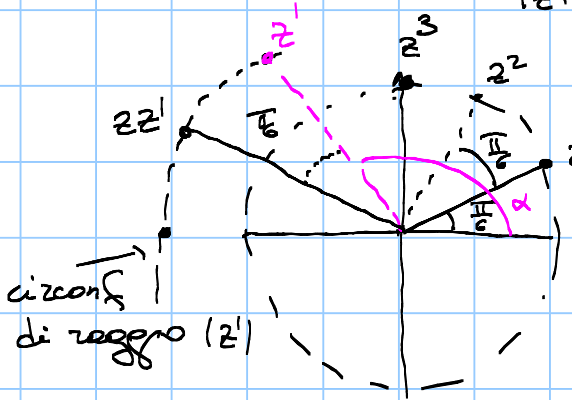


$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z' = -1 - \sqrt{3}\, i$

$|z'| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$= \underset{|z'|}{2} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}_{\text{cis}\,\theta = \text{Arg}\, z'}$$



$z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$z^2 = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$

$z^3 = \cos\frac{3\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

NB Preso un numero qualsiasi $z' \neq 0$ $\quad z' = |z'|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$z' \cdot z = z \cdot z' = z'\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = |z'|\left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right]$