FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canali 2,3)

Docenti: C. Bertolin, L. Fiorot, L. Martini

III appello 2023/24
Data: 11/09/2024
Tema: A

Regole d'esame. Durata: **1 ora e 30 minuti.** È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

- ***ESERCIZIO 1.*** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle condizioni:
$$\ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  1. Si determinino la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e una base di $\mathrm{im}(f)$. L'applicazione f è iniettiva? È surriettiva? (2 pti)
  2. Determinare una matrice invertibile H e una matrice diagonale D tale che $H^{-1}AH = D$ (quindi $A = HDH^{-1}$). La matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile? (2 pti)
  3. Dimostrare che $A^n = A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 1.*** **Soluzione**

  1. Essendo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linearmente indipendenti essi formano una base di $\mathbb{R}^3$ quindi esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Questa condizione implica che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 0, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore -1 e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 1. La matrice associata a f rispetto alla base canonica è
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$
  2. Dal punto precedente abbiamo visto che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di autovettori con relativi autovalori $0, -1, 1$ quindi
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Essendo $A = HDH^{-1}$ si ha $A^n = HD^nH^{-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Essendo per n dispari
$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$
si ha $A^n = HD^nH^{-1} = HDH^{-1} = A$ per ogni n dispari.

- ***ESERCIZIO 2.*** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottoinsieme U_t :
$$U_t : \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_3 + 2x_4 = t \end{cases}$$
e il sottospazio $W := \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

1. Per quale valore di t il sottoinsieme U_t è sottospazio di $\mathbb{R}^4$? Detto U tale sottospazio determinare una base ortonormale di U. (2 pti)
2. Determinare una base e dimensione per: W, $U \cap W$, $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (2 pti)
3. Si determinino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che la proiezione ortogonale del vettore v su U sia v ed anche la proiezione ortogonale del vettore v su W sia v. (1 pti)
4. Si determinino tutti i vettori $w \in W$ tali che la proiezione ortogonale di w su U sia $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 2.***

1. Il sottoinsieme U_t è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ se e solo se $t = 0$ ed una base ortonormale di U è:
$$\mathrm{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \right\}$$
2. $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim W = 2$, $B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim U \cap W = 1$, $U + W = \mathbb{R}^4$, $B_{U+W} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,$\dim(U + W) = 4$. I sottospazi U e W non sono in somma diretta.
3. La proiezione ortogonale di v su U è v se e solo se $v \in U$. Analogamente la proiezione ortogonale di v su W è v se e solo se $v \in W$. Quindi i vettori che soddisfano la richiesta sono tutti e soli i vettori di $U \cap W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

4. Un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ ha proiezione ortogonale su U pari a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se e solo se $v \in \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Quindi i vettori richiesti sono tutti e soli i vettori di W intersecato $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e l'unico è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ***ESERCIZIO 3.*** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette il piano

$$r = \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s, una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e la loro distanza. (2 pti)
2. Determinare l'equazione cartesiana di un piano disgiunto sia da r che da s ed equidistante da r ed s. (2 pti)
3. Daterminare l'aera del parallelogramma di vertici i punti: $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = O + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = O + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = O + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pti)

- ***SOLUZIONE 3.***

1. Le rette r ed s sono sghembe; i punti di minima distanza sono $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in r e $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in s quindi la distanza fra r ed s è $\sqrt{2}$.
2. Il piano richiesto è il piano parallelo sia ad r che ad s e passante per il punto medio fra r ed s. Essendo il vettore $S - R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ortogonale sia ad r che ad s il piano richiesto appartiene al fascio $x - z = k$. Il punto medio fra r ed s è $\frac{R+S}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ quindi il piano richiesto è $\pi : x - z = 1$.
3. L'area richiesta è il modulo del prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ che risulta $\sqrt{14}$.

- ***TEORIA***

(a) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare. (3 pti)

(b) Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (3 pti)