FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canali 2,3)

Docenti: C. Bertolin, L. Fiorot, L. Martini

I appello 2023/24
Data: 23/01/2024
Tema: A

Regole d'esame. Durata: **1 ora e 30 minuti.** È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

- ***ESERCIZIO 1.*** Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - 3x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0 \right\}; \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare una base di U, e una base di $U \cap W$. Calcolare le dimensioni di: U, W, $U \cap W$, $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (4 pti)
2. Trovare una base ortonormale di U. (2 pti)
3. Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^4$ tale che $Z \oplus (U + W) = \mathbb{R}^4$. (1 pti)

- ***SOLUZIONE 1.***

1. $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
   $\dim(U) = 2, \dim W = 2, \dim(U \cap W) = 1, \dim(U + W) = 3$.
   U e W non sono in somma diretta perché $\dim(U \cap W) \neq 0$.
2. Una base ortonormale di U è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} (2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. Un tale Z non è unico per esempio $Z = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

- ***ESERCIZIO 2.*** Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

i) Determinare Ker(f), Im(f) e le relative dimensioni . L'endomorfismo f è iniettivo? È suriettivo? È invertibile? (3 pti)

ii) Calcolare $f^{-1}\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\8\\0\end{smallmatrix}\right)\}$. (2 pti)

iii) Dimostrare che A è diagonalizzabile e determinare una matrice H invertibile e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}AH = D$. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 2.***

i) $Ker(f) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \right\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0, \dim \mathrm{Im}(f) = 3$. L'endomorfismo f è iniettivo, suriettivo e invertibile.

ii) $f^{-1}\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\8\\0\end{smallmatrix}\right)\} = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\}$.

iii) La matrice A è simmetrica quindi è diagonalizzabile. $D = \begin{pmatrix}-10 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

- ***ESERCIZIO 3.*** Nello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta r e il piano π:

$$r : \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)\rangle \qquad \pi : 2x + 2y + z = 1$$

a) Determinare equazioni cartesiane per r e scrivere π come sottovarietà lineare $P+V_\pi$. (2 pti)

b) Determinare la posizione reciproca e la distanza tra π e r. (2 pti)

- ***SOLUZIONE 3.***

a) $r : \begin{cases} x = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$. $\pi : \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

b) La retta r è parallela al piano π e disgiunta, $d(r, \pi) = 1$.

- ***TEORIA***

(a) Enunciare e dimostrare il teorema delle dimensioni. (3 pti)

(b) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e dimostrare che non vale viceversa fornendo un controesempio. (3 pti)